第 9 回 行列式の性質

本日の講義の目標

目標 9

1. 行列式の性質 (線形性, 交代性, 正規性) について理解する.
2. 行列式の性質を用いた計算方法について理解する.

行列式の性質

行列 $A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{pmatrix}$ の行列式を $|A| = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{vmatrix}$ と表す．行列式は次の性質をもつ．

命題 9.1

k を任意のスカラーとし，i, j を任意の整数とする．

(1) $$\begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i + \mathbf{a}'_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}'_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{vmatrix}$$

(2) $$\begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ k\mathbf{a}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{vmatrix}$$

(3) $$\begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_j \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_j \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{vmatrix}$$

(4) $|E| = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{e}_n \end{vmatrix} = 1$ 　　ただし E は単位行列 $E = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{e}_n \end{pmatrix}$ とする．

(1) と (2) を**線形性**, (3) を**交代性**, (4) を**正規性**という．

例

(1) $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4+1 & 3+2 & 5+3 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

(2) $$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 9 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3\times 1 & 3\times 2 & 3\times 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

(3) $$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \overset{②\leftrightarrow③}{=\!=\!=} (-1)\begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

(4) $$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

行列式の性質 2

命題 9.2

二つの行が等しい行列 A に対し, 行列式 $|A|$ の値は 0 に等しい.

証明)

$$|A| = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{b} \\ \vdots \\ \mathbf{b} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{vmatrix} \overset{\text{行を交換}}{=\!=\!=\!=} (-1) \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{b} \\ \vdots \\ \mathbf{b} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{vmatrix} = -|A|.$$

したがって $2|A| = 0$, すなわち $|A| = 0$. □

命題 9.3

行列 A のある行に他の行の定数倍を加えても行列式 $|A|$ の値は不変である.

証明)

$$|A| = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_j \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_j \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{vmatrix} + k \times 0 = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_j \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_j + k\mathbf{a}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{vmatrix} (=: |B|). \quad \square$$

この等式の左辺と右辺を比較すれば, j 行目に i 行目の k 倍を加える基本変形を A に行い B を得たように見える:

$$|A| \overset{(j)+k\times(i)}{=\!=\!=\!=} |B| \qquad \left(A \xrightarrow{(j)+k\times(i)} B\right).$$

行列式の性質 4

命題 9.4

行列の転置をとっても, 行列式の値は不変である.

例 9.5

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & x \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$$

命題 9.4 より行列式の次の性質を得る.

命題 9.6

行列式の行に関する性質はすべて列でも成立する (列基本変形に関する性質など).

行列式の性質 5

命題 9.7

$$\left|\begin{array}{c|ccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \hline 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{array}\right| = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

命題 9.7 はこの後学ぶ**行列式の余因子展開** (定理 10.5) の特別な場合になっている．$\left|\begin{array}{c|c} a & * \\ \hline \mathbf{0} & A' \end{array}\right| = a|A'|$ (ただし A' は A から 1 行 1 列を除いた行列) と表す．命題 9.4 により，$\left|\begin{array}{c|c} a & \mathbf{0} \\ \hline * & A' \end{array}\right| = a|A'|$ も成立する．これらの性質は行列式の計算をより小さなサイズの行列式の計算へと帰着することを可能にする．

例

例 9.8

$$\left|\begin{array}{c|cc} 3 & \pi & 1+x \\ \hline 0 & 4 & 8 \\ 0 & 5 & 9 \end{array}\right| = 3 \times \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 5 & 9 \end{vmatrix} = 3(4 \times 9 - 8 \times 5) = 3 \times (-4) = -12.$$

階段行列の行列式の値は対角成分の積に等しい.

例 9.9

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}$$

行列式の計算への応用 1

以下では $\boxed{1}, \boxed{2}, \boxed{3}$ により, 1 列, 2 列, 3 列を表す.

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ -3 & -1 & -2 \end{vmatrix} \overset{③-3\times①}{=\!=\!=\!=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 5 & 7 \end{vmatrix} \overset{\text{命題 9.7}}{=\!=\!=} 1 \times \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 4 \times 7 - 5^2 = 3.$

(2) (列基本変形と組合せた計算例)

$$\begin{vmatrix} 95 & 96 & 97 \\ 96 & 97 & 99 \\ 97 & 98 & 99 \end{vmatrix} \underset{②-①}{\overset{③-①}{=\!=\!=\!=}} \begin{vmatrix} 95 & 96 & 97 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} \underset{\boxed{2}-\boxed{1}}{\overset{\boxed{3}-\boxed{1}}{=\!=\!=\!=}} \begin{vmatrix} 95 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\boxed{1}\leftrightarrow\boxed{2}}{=\!=\!=\!=} - \begin{vmatrix} 1 & 95 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -1 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1) \times (-2) = 2.$$

行列式の計算への応用 2

(3) $$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 0 & 8 & 0 \\ 4 & 0 & 9 & 10 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 9 & 10 \end{vmatrix} = 1 \times 5 \times \begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 9 & 10 \end{vmatrix} = 1 \times 5 \times 8 \times 10 = 400.$$

(4) (Vandermonde 型行列式)

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} &\underset{\boxed{3}-\boxed{1}}{\overset{\boxed{2}-\boxed{1}}{=\!=\!=\!=}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & y-x & z-x \\ x^2 & y^2-x^2 & z^2-x^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y-x & z-x \\ y^2-x^2 & z^2-x^2 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} y-x & z-x \\ (y-x)(y+x) & (z-x)(z+x) \end{vmatrix} \\
&= (y-x)(z-x) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ y+x & z+x \end{vmatrix} \\
&= (y-x)(z-x)(z-y).
\end{aligned}$$