# 第 4 回 連立方程式と基本変形

本日の講義の目標

**目標 4**

1. 連立方程式の (拡大) 係数行列を用いた表し方について理解する.
2. 行列の (行) 基本変形について理解する.
3. 基本変形による連立方程式の解法 (唯一解の場合) について理解する.

# 連立方程式と (拡大) 係数行列

$$\begin{cases} 2x + 4y = 8 \\ -3x + 5y = -1 \end{cases} \quad \cdots(\heartsuit) \quad や \quad \begin{cases} x + 2y + 2z = 2 \\ 3x + 8y + 4z = 6 \\ 2x + 8y + z = 5 \end{cases} \quad \cdots(\clubsuit)$$

のような方程式を (一次) **連立方程式**という.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \end{pmatrix}$$

とおくと $(\heartsuit)$ は式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ により表せる. 同様に

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 8 & 4 \\ 2 & 8 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

とおくと $(\clubsuit)$ も式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ により表せる. 一般に連立方程式は, 適当な行列 $A$ と変数ベクトル $\mathbf{x}$, 方程式の右辺の数を成分とするベクトル $\mathbf{b}$ を用いて

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

と (一意に) 表せる.

# 連立方程式と拡大係数行列 2

## 定義 4.1

(($\heartsuit$) や ($\clubsuit$) のように) 連立方程式を $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ と表すとき, $A$ を方程式の**係数行列**といい, $A$ と $\mathbf{b}$ を $\mid$ により区切って並べた行列

$$\tilde{A} = (A \mid \mathbf{b})$$

を方程式の**拡大係数行列**という. ($\tilde{A}$ の ˜ は "チルダ" と読む. )

($\heartsuit$) と ($\clubsuit$) の拡大係数行列はそれぞれ

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 8 \\ -3 & 5 & -1 \end{array}\right) \qquad \text{と} \qquad \tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 8 & 2 \\ 3 & 8 & 4 & 6 \\ 2 & 8 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

で与えられる.

# 連立方程式と拡大係数行列 3

## 例題 4.2

連立方程式 $\begin{cases} x - y = 1 \\ y - z = 2 \\ z - x = 3 \end{cases}$ の拡大係数行列 $\tilde{A}$ を求めよ.

**解答)**

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

# 連立方程式と拡大係数行列 4

連立方程式

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \cdots ① \\ 2x + 3y = 8 \cdots ② \end{cases}$$

を解く. ② から ① の 2 倍を引く (② $+ (-2) \times$ ①) と,

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \cdots ①' \\ -y = -2 \cdots ②' \end{cases}$$

となる. ②' を $(-1)$ 倍する (②' $\times (-1)$) と,

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \cdots ①'' \\ y = 2 \cdots ②'' \end{cases}$$

最後に ②'' から ①'' の 2 倍を引く (①'' $+ (-2) \times$ ②'') と方程式の解を得る:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2. \end{cases}$$

# 連立方程式と拡大行列 5

連立方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ と拡大係数行列 $\tilde{A} = (A \mid \mathbf{b})$ は本質的に同じものを表すので, 係数行列 $\tilde{A}$ の変化を見る.

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x + 3y = 8 \end{cases} \xrightarrow{②+(-2)\times①} \begin{cases} x + 2y = 5 \\ -y = -2 \end{cases} \xrightarrow{②\times(-1)} \begin{cases} x + 2y = 5 \\ y = 2 \end{cases} \xrightarrow{①+(-2)\times②} \begin{cases} x = 1 \\ y = 2. \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow{②+(-2)\times①} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{②\times(-1)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{①+(-2)\times②} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

連立方程式を解くためには, 係数行列が単位行列になるように “変形” を行えば良い!

# 行列の基本変形

行列の基本変形は, 拡大係数行列に限らず, 一般の行列に対し定義される.

## 定義 4.3 ((行) 基本変形)

行列の次の 3 つの変形を ***(行) 基本変形***という:

1. 1 つの行に 0 でない数をかける. (例：$② \times (-1)$)
2. 1 つの行に他の行の何倍かを加える. (例：$② + (-2) \times ①$)
3. 2 つの行を交換する. (例：$① \leftrightarrow ②$)

基本変形は可逆的であり, 基本変形を行って得られる連立方程式は, 全て同じ解の集合を持つことに注意する.

## 定理 4.4

拡大係数行列の基本変形を行っても, 連立方程式の解は変わらない.

行列 $A$ に (いくつかの) 基本変形を行い行列 $B$ が得られるとき, $A \longrightarrow B$ を表す.

## 例 4.5

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{② - 3 \times ①} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

## 例題 4.6

$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ に対し以下の基本変形を行え.

1. $A$ の 2 行目を 2 倍する (② $\times$ 2).
2. $A$ の 1 行目を $(-2)$ 倍して, 3 行目に加える (③ + ① $\times$ $(-2)$). .
3. $A$ の 2 行目と 3 行目を入れ替える (② $\longleftrightarrow$ ③).

**解答)**

1. $A \xrightarrow{②\times 2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \\ 4 & -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
2. $A \xrightarrow{③+①\times(-2)} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$
3. $A \xrightarrow{②\longleftrightarrow③} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

# 掃き出し法1

行列の基本変形を用いた連立方程式の解法を**掃き出し法**という.

## 例題 4.7

行列の基本変形を用いて, 連立 1 次方程式 $\begin{cases} x+y-z=4 \\ 2x-y+3z=-3 \\ x+2y+4z=1 \end{cases}$ を解け.

**解答)** 　方程式の拡大係数行列 $\tilde{A}$ は次のように基本変形される:

$$\tilde{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & -3 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[③-①]{②-2\times①} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -3 & 5 & -11 \\ 0 & 1 & 5 & -3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{②\leftrightarrow③} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & -3 \\ 0 & -3 & 5 & -11 \end{array}\right) \xrightarrow[③+3\times②]{①-②} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -6 & 7 \\ 0 & 1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 20 & -20 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{③\times\frac{1}{20}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -6 & 7 \\ 0 & 1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[②-5\times③]{①+6\times③} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

よって求める方程式の解は $x=1, y=2, z=-1$ である.

# 掃き出し法 2

## 定理 4.8

連立方程式

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{$\heartsuit$}$$

の拡大係数行列を $\tilde{A} = (A \mid \mathbf{b})$ とする. $\tilde{A}$ に (いくつかの) 行基本変形を行い

$$\tilde{A} \longrightarrow (E \mid \mathbf{b}')$$

となるとき, ($\heartsuit$) の解は $\mathbf{x} = \mathbf{b}'$ に等しい. ただし $E$ は単位行列を表す.