第 12 回 行列式のまとめ

本日の講義の目標

目標 12

1. 行列式の乗法性について理解する.
2. 行列式を用いた行列の正則性の条件について理解する.

余因子行列と逆行列 (復習)

前回の講義では余因子行列と逆行列の関係について学んだ. n 次正方行列 A に対し, A の (i,j) 余因子を Δ_{ij} $(1 \leq i, j \leq n)$ で表せば, A の余因子行列 $\mathrm{adj}(A)$ は

$$\mathrm{adj}(A) = \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \cdots & \Delta_{n1} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \cdots & \Delta_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_{1n} & \Delta_{2n} & \cdots & \Delta_{nn} \end{pmatrix}$$

により定義され,

$$A\,\mathrm{adj}(A) = \mathrm{adj}(A)A = |A|E \qquad (E \text{ は } n \text{ 次単位行列})$$

を満たす. とくに $|A| \neq 0$ のとき, A は正則であり

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\,\mathrm{adj}(A)$$

が成り立つ (定理 11.9, 系 11.10).

行列式の乗法性

実は A が正則であるためには $|A| \neq 0$ が必要十分であることがわかる.

定理 12.1

n 次行列 A, B に対し,

$$|AB| = |A||B|$$

が成り立つ.

実際, 定理 12.1 を認めると, A が正則ならば,

$$1 = |E| = |AA^{-1}| = |A||A^{-1}|$$

が成りたち, とくに $|A| \neq 0$ がわかる.

定理 12.2

正方行列 A に対し,

$$A \text{ が正則} \iff |A| \neq 0$$

定理 12.1 (行列式の乗法性) の証明

$2n$ 次の行列 $\begin{pmatrix} A & O \\ -E & B \end{pmatrix}$ を考える．この行列の行列式は

$$\begin{vmatrix} A & O \\ -E & B \end{vmatrix} = |A||B|$$

と計算される．一方 $k = 1, 2, \ldots, n$ に対し，列基本変形

$$\boxed{\text{n+k}} + b_{1,k} \times \boxed{1} + b_{2,k} \times \boxed{2} \cdots + b_{n,k} \times \boxed{n}$$

を行うと

$$\begin{vmatrix} A & O \\ -E & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & AB \\ -E & O \end{vmatrix}$$

と変形される．最後の式は

$$\begin{vmatrix} A & AB \\ -E & O \end{vmatrix} = (-1)^n \begin{vmatrix} -E & O \\ A & AB \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E & O \\ A & AB \end{vmatrix} = |AB|$$

と変形されるので，求める主張 $|AB| = |A||B|$ を得る． □

例題 12.3

行列 $A = \begin{pmatrix} a-5 & 3 & 1 \\ -3 & 4 & a-9 \\ 0 & a-2 & 0 \end{pmatrix}$ が正則でないような定数 a の値を全て求めよ.

解答) A の行列式の値は,

$$
\begin{aligned}
|A| &= \begin{vmatrix} a-5 & 3 & 1 \\ -3 & 4 & a-9 \\ 0 & a-2 & 0 \end{vmatrix} \\
&\underset{\text{③で展開}}{=\!=\!=} (a-2)\left(-\begin{vmatrix} a-5 & 1 \\ -3 & a-9 \end{vmatrix}\right) \\
&= -(a-2)\{(a-5)(a-9)+3\} \\
&= -(a-2)\left\{a^2-14a+48\right\} \\
&= -(a-2)(a-6)(a-8)
\end{aligned}
$$

となる. 定理 12.2 より, 求める定数 a の値は $a = 2, 6, 8$.

例題 12.4

行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ と $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ に対し,

(1) AB　　(2) B^3　　(3) A^{-1}

の行列式の値を求めよ.

解答)　A と B の行列式の値は, サラスの公式によりそれぞれ

$$|A| = 1^3 + 2^3 + 3^3 - 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 = 18,$$
$$|B| = 1^3 + 0 + 0 - 0 - (-2)^2 - (-2)^2 = -7,$$

と求められる. 定理 12.1 より

$$(1) \quad |AB| = |A||B| = 18 \cdot (-7) = -126.$$
$$(2) \quad |B^3| = |B|^3 = (-7)^3 = -343.$$
$$(3) \quad |A^{-1}| = |A|^{-1} = 1/18.$$

文字を含む行列式

前々回の講義で紹介した

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} = (y-x)(z-x)(z-y)$$

は次の行列式の特別な場合である.

例 12.5 (Vandermonde 型行列式)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

は変数の差の全ての積を掛け合わせるので**差積**とも呼ばれる.

文字を含む行列式 2

次の行列式も有名である.

例 12.6 (巡回型行列式)

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix} = (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$$

実際, 各列 (各行) の和が $x+y+z$ に等しいので,

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix} \xlongequal{①+②+③} \begin{vmatrix} x+y+z & x+y+z & x+y+z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix} = (x+y+z)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix}$$

と式変形できて, 最後の式を計算すると右辺の式に等しくなる. 左辺の式を展開することにより, 次の等式が得られる:

$$x^3+y^3+z^3-3xyz = (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx).$$

文字を含む行列式 3

例題 12.7

行列式 $\begin{vmatrix} a & b & b \\ 3a & 2a+b & a+2b \\ a+2b & 2a+b & 3b \end{vmatrix}$ を因数分解せよ.

解答)

$$\begin{vmatrix} a & b & b \\ 3a & 2a+b & a+2b \\ a+2b & 2a+b & 3b \end{vmatrix} \xlongequal[\text{③}-3\times\text{①}]{\text{②}-3\times\text{①}} \begin{vmatrix} a & b & b \\ 0 & 2(a-b) & a-b \\ -2(a-b) & 2(a-b) & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (a-b)^2 \begin{vmatrix} a & b & b \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (a-b)^2(-2b+4b-2a)$$

$$= (a-b)^2(2b-2a)$$

$$= -2(a-b)^3.$$

行列の正則性

最後に行列の正則性に関する条件を整理してこの講義を終えることにする.

定理 12.8

n 次正方行列 A に対する次の条件は同値である[a]:

1. $\operatorname{rank} A = n$.
2. A の簡約化は n 次単位行列 E_n に等しい.
3. 連立方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ はただひとつの解をもつ.
4. A は正則行列である (逆行列 A^{-1} が存在する).
5. A の行列式 $|A|$ の値は非零.

[a] 1. から 3. については第 6 回講義を, 4. については第 7 回講義を, 5. については第 12 回講義を参照せよ.