第 10 回 余因子と行列式の展開

本日の講義の目標

目標 10

1. 行列の小行列式と余因子について理解する.
2. 行列式の余因子展開について理解する.

小行列式と余因子

A を n 次 (正方) 行列とする.

定義 10.1

A から第 i 行と第 j 列を取り除いて得られる $(n-1)$ 次の行列 A_{ij} の行列式 $|A_{ij}|$ を A の (i,j) **小行列式**とよび, 記号 D_{ij} で表す. また,

$$\Delta_{ij} := (-1)^{i+j} D_{ij} = (-1)^{i+j} |A_{ij}|$$

を A の (i,j) **余因子**という.

例 10.2

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ のとき, $D_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \times 4 - 2 \times 3 = -2.$

$\Delta_{23} = (-1)^{2+3} D_{23} = -(-2) = 2.$ 同様に $D_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \times 1 - 3 \times 4 = -10.$

$\Delta_{12} = (-1)^{1+2} D_{12} = -(-10) = 10.$

小行列式と余因子 2

小行列式と余因子

$$A \xrightarrow{i\text{ 行と }j\text{ 列を取り除く}} A_{ij} \xrightarrow{\text{行列式をとる}} D_{ij} \xrightarrow{\times(-1)^{i+j}} \Delta_{ij}$$

(小行列式) (余因子)

余因子の定義における $(-1)^{i+j}$ は $i+j$ の偶奇により ± 1 のいずれかの値をとる.

注意 10.3 (余因子の符号)

(i,j) 成分の位置に $(-1)^{i+j}$ の符号を書くと,

$$\begin{pmatrix} + & - \\ - & + \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix} \quad \cdots$$

のようになる ($+$ と $-$ がチェック模様のように交互に現れる).

例題 10.4

行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ の (i,j) 余因子 Δ_{ij} $(1 \leq i, j \leq 3)$ を計算し，それを (i,j) 成分とする行列 $B = (\Delta_{ij})$ を書け.

解答)

$$
\begin{aligned}
\Delta_{11} &= \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -6 & \Delta_{12} &= -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2 & \Delta_{13} &= \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \\
\Delta_{21} &= -\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 10 & \Delta_{22} &= \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 & \Delta_{23} &= -\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -6 \\
\Delta_{31} &= \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -1 & \Delta_{32} &= -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 & \Delta_{33} &= \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 2
\end{aligned}
$$

よって，

$$B = (\Delta_{ij}) = \begin{pmatrix} -6 & -2 & 5 \\ 10 & 1 & -6 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

行列式の余因子展開

A を n 次行列とし, その (i,j) 成分を a_{ij} で表す ($1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$).

定理 10.5

A の (i,j) 余因子を Δ_{ij} とする. このとき, A の行列式 $|A|$ に対し,

$$|A| = a_{i1}\Delta_{i1} + \cdots + a_{in}\Delta_{in}$$

が成り立ち, この式を $|A|$ の**第 i 行に関する展開**という. また,

$$|A| = a_{1j}\Delta_{1j} + \cdots + a_{nj}\Delta_{nj}$$

が成り立ち, 同様に $|A|$ の**第 j 列に関する展開**という.

すなわち, A の第 i 行 (第 j 列) の成分に第 i 行 (第 j 列) の余因子をかけて足し合わせると, A の行列式 $|A|$ の値に等しくなることを意味している (命題 9.4 から行に関する性質は列でも成立する).

例 10.6

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

とする. $|A|$ を 1 行で展開すると,

$$\begin{aligned} |A| &= 1 \cdot \Delta_{11} + 3 \cdot \Delta_{12} + (-1) \cdot \Delta_{13} \\ &= 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -3 - 9 + 0 = -12. \end{aligned}$$

$|A|$ を 2 列で展開すると,

$$\begin{aligned} |A| &= 3 \cdot \Delta_{12} + (-2) \cdot \Delta_{22} + 1 \cdot \Delta_{32} \\ &= 3 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + (-2) \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -9 + 0 - 3 = -12. \end{aligned}$$

行列式の余因子展開(つづき)

注意 10.7

行列式の展開は任意の行 (列) で行なって良い. 勝手な行 (列) をひとつ選んで展開すれば, 行列式の値を計算できる.

例 10.8

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix}$$

- (むだな計算)

$$|A| \xlongequal{①\text{で展開}} 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - 1 \cdot 0 + 2 \cdot 12 = 32.$$

- (効率的な計算)

$$|A| \xlongequal{③\text{で展開}} 4\Delta_{32} = 4 \cdot \left(- \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \right) = 4 \cdot 8 = 32.$$

命題 9.7 は余因子展開の特別な場合と捉えることができる.

命題 10.9 (命題 9.7 再掲)

$$\left|\begin{array}{c|ccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \hline 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{array}\right| = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \left|\begin{array}{c|ccc} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ \hline a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{array}\right|$$

すなわち

$$\left|\begin{array}{c|c} a & * \\ \hline \mathbf{0} & A' \end{array}\right| = a|A'| = \left|\begin{array}{c|c} a & \mathbf{0} \\ \hline * & A' \end{array}\right|$$

が成立する. 実際, ここで $|A'|$ は A の $(1,1)$ 余因子に等しい.

“行列式の基本変形” との合わせ技

行列式の余因子展開は “**行列式の基本変形**” (命題 9.3) と組み合わせて用いると，計算が “楽ちん” である．

例 10.10

$$\begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & 9 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} \overset{\boxed{1}+\boxed{3}}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} 5 & -5 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} \overset{2\text{で展開}}{=\!=\!=} 1 \cdot \Delta_{23} =$$

$$1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 5 & -5 & 9 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} \overset{3-2}{=\!=\!=} - \begin{vmatrix} 5 & -5 & 9 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} \overset{3\text{で展開}}{=\!=\!=} -2\Delta_{31} =$$

$$-2 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -5 & 9 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -2(-5 \times 2 - 9 \times 3) = 74.$$

行列式の計算のまとめ

計算のポイント

1. 行列式の “基本変形” を用いて 0 を多く含む行 (または列) をつくる.
2. 余因子展開を用いて 0 を多く含む行 (または列) において展開する.