第1回 ベクトル, 内積

本日の講義の目標

目標 1

1. ベクトルの定義, 和とスカラー倍について理解する.
2. ベクトルの内積, 外積とその性質について理解する.

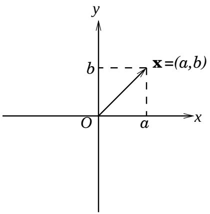
ベクトルの定義

定義 1.1

平面または空間上の矢印 (有向線分) を**ベクトル**という.

- 矢印の根元を**始点**, 矢印の先を**終点**という.
- 矢印の長さを**大きさ**という.

ベクトルは大きさと向きを持ち, これらが等しいベクトルどうしを" 同じ" とみなす. 物理学ではベクトルで力や速度などを表す. 本講義では, アルファベットの太文字 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \ldots, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \ldots$ などを用いてベクトルを表す. 原点 O を始点とするベクトルを**位置ベクトル**という. 任意のベクトルに対し, ただ一つの位置ベクトルが決まり, その終点の座標 (a, b) (または (a, b, c)) をベクトルの**成分表示**という.



ベクトルの和とスカラー倍

定義 1.2

n を自然数とする. n 個の数 (スカラー)$x_1, \ldots, x_n$ を並べた

$$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$$

を (n 次元) **数ベクトル**という. [a]

[a] 数を縦に並べたものを**列ベクトル**, 横に並べたものを**行ベクトル**という.

数ベクトルは平面ベクトル, 空間ベクトルを自然に拡張した概念である. i 番目の数を $\mathbf{x}$ の**第** i **成分**という.

定義 1.3

k をスカラーとする. 2 つの数ベクトル $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ と $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ に対し, 和 $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ および $\mathbf{x}$ の k 倍 $k\mathbf{x}$ を次のように定義する:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} + \mathbf{y} &= (x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n), \\ k\mathbf{x} &= k(x_1, \ldots, x_n) = (kx_1, \ldots, kx_n). \end{aligned}$$

ベクトルの和とスカラー倍(例題)

例題 1.4

空間ベクトル $\mathbf{x} = (1, -2, 1)$ と $\mathbf{y} = (4, 3, 2)$ に対し, 次のベクトルを計算せよ.

(1) $\mathbf{x} + \mathbf{y}$　　(2) $4\mathbf{y}$　　(3) $2\mathbf{x} + 3\mathbf{y}$

解答)　(1) $\mathbf{x} + \mathbf{y} = (1, -2, 1) + (4, 3, 2) = (1 + 4, -2 + 3, 1 + 2) = (5, 1, 3).$

(2) $4\mathbf{y} = 4(4, 3, 2) = (16, 12, 8).$

(3) $2\mathbf{x} + 3\mathbf{y} = 2(1, -2, 1) + 3(4, 3, 2) = (14, 5, 8).$

ベクトルの内積

定義 1.5

2 つの n 次元数ベクトル $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ と $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ の**内積** $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ を

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} := x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

により定義する．また $\mathbf{x}$ の**ノルム (長さ，または大きさともいう)** $|\mathbf{x}|$ を

$$|\mathbf{x}| := \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$

により定義する．

内積は次の性質を持つ．

- $|\mathbf{x}|^2 = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}$.
- $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}$.
- $(k\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot (k\mathbf{y}) = k\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$. (ただし k はスカラー)
- $\mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x} \cdot \mathbf{z}$.

命題 1.6 (内積の幾何学的性質)

$\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ を平面ベクトルまたは空間ベクトルとし, $\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ のなす角を θ とする.

1. $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = |\mathbf{x}||\mathbf{y}| \cos\theta$ (証明は**余弦定理**を用いる).
2. $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0 \iff \mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ は直行する ($\theta = \pi/2$).

例題 1.7

空間ベクトル $\mathbf{x} = (2, 2, -1)$ と $\mathbf{y} = (0, 1, -1)$ に対し, 次を求めよ.

(1) $\mathbf{x}$ のノルム $|\mathbf{x}|$ (2) 内積 $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ (3) $\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ のなす角 θ

解答) (1) $|\mathbf{x}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{9} = 3.$

(2) $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 2 \times 0 + 2 \times 1 + (-1)^2 = 3.$

(3)

$$\arccos \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{|\mathbf{x}||\mathbf{y}|} = \arccos\left(\frac{3}{3 \cdot \sqrt{2}}\right) = \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

(空間) ベクトルの外積

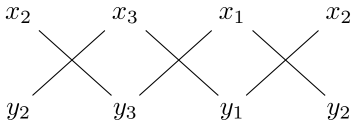
定義 1.8

2 つの空間ベクトル $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ と $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ に対し, $\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ の**外積**を

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1)$$

により定義する.

すなわち, 下の図で線で結ばれている成分どうしをかけて (たすきがけして) 差をとる.



例 1.9

$\mathbf{x} = (1, 2, 3)$ と $\mathbf{y} = (4, 5, 6)$ に対し, 外積 $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ は

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = (2 \times 6 - 3 \times 5, 3 \times 4 - 1 \times 6, 1 \times 5 - 2 \times 4) = (-3, 6, -3).$$

外積の性質

命題 1.10

$\mathbf{x}, \mathbf{y}$ を空間ベクトルとし, $\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ のなす角を θ とする．このとき,

1. $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ と $\mathbf{x}$ は直交する $((\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \cdot \mathbf{x} = 0)$.
2. $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ と $\mathbf{y}$ も直交する $((\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \cdot \mathbf{y} = 0)$.
3. $\mathbf{x} \times \mathbf{y} = -\mathbf{y} \times \mathbf{x}$
4. $|\mathbf{x} \times \mathbf{y}| = |\mathbf{x}||\mathbf{y}| \sin\theta$, すなわち, $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ の長さは $\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ で張られる平行四辺形の面積に等しい.

命題 1.10(1)(2) の性質は, 後に平面の方程式の定義に用いられる.

例 1.11

$\mathbf{x} = (1, 2, 3)$, $\mathbf{y} = (4, 5, 6)$ のとき, 例題 1.9 より, $\mathbf{x} \times \mathbf{y} = (-3, 6, -3)$．実際,

$$(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \cdot \mathbf{x} = (-3, 6, -3) \cdot (1, 2, 3) = -3 + 12 - 9 = 0.$$

同様に, $(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \cdot \mathbf{y} = 0$ が確認できる.