線形代数１, 第６回演習問題

2024/5/23　担当：那須

$\boxed{1}$ 次の行列を行基本変形により簡約化し, 階数を求めよ.

(1) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -6 & 9 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -5 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

$\boxed{2}$ 次の連立１次方程式を基本変形 (掃き出し法) を用いて解け.

(1) $\left(\begin{array}{cc|c} x & y & \\ \hline 3 & 5 & -1 \\ 7 & 12 & 1 \end{array}\right)$　(2) $\left(\begin{array}{cc|c} x & y & \\ \hline 4 & 6 & -6 \\ -8 & -12 & 12 \end{array}\right)$　(3) $\left(\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline 1 & 3 & 5 & 2 \\ 2 & 7 & 13 & 5 \\ -3 & -9 & -15 & -6 \end{array}\right)$

(4) $\left(\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 7 & 10 \\ 4 & 8 & 6 & 10 \end{array}\right)$　(5) $\left(\begin{array}{cccc|c} x & y & z & w & \\ \hline 1 & 2 & -3 & -4 & -4 \\ -2 & -6 & 7 & 7 & 6 \\ 3 & 7 & -7 & -9 & -6 \\ -4 & -5 & 13 & 20 & 24 \end{array}\right)$　(6) $\left(\begin{array}{cccc|c} x & y & z & w & \\ \hline 1 & 2 & 3 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & -7 & -5 & -18 \\ 3 & 6 & 7 & 18 & 34 \\ -4 & -8 & -15 & -10 & -37 \end{array}\right)$

$\boxed{3}$ 次の連立１次方程式の解の個数がどのようになっているか調べよ.
答えは「1：解無し」,「2：解は無限個ある」,「3：解は唯一」の３つの中から選択せよ.

(1) $\left(\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right)$　(2) $\left(\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline 0 & -1 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & 1 & -3 \\ -3 & 13 & 5 & 1 \end{array}\right)$　(3) $\left(\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$

$\boxed{4}$ 次の連立１次方程式が解をもつための a, b の条件を求めよ. (教科書 p.33, 問題 2.3-2)

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ b \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$

---

[0]解答：

$\boxed{1}$ 基本変形は省略. 簡約化と階数 (rank) のみ記す.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 階数は 1　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 階数は 3　(3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 階数は 2

$\boxed{2}$ (1)　$x = -17, y = 10$　(2)　$x = -\dfrac{3+3t}{2}$, $y = t$ (t は任意)　(3)　$x = -1 + 4t$, $y = 1 - 3t$, $z = t$ (t は任意)
(4)　$x = 1 - 2t$, $y = t$, $z = 1$ (t は任意)　(5)　$x = -2 + 3t$, $y = 2 - t$, $z = 2 - t$, $w = t$ (t は任意)　(6)　解なし

$\boxed{3}$ (1)　解なし　(2)　解は無限個ある　(3)　解は唯一

$\boxed{4}$ (1)　$a + 2b = 1$　(2)　$a \neq 2$

ポイント!

連立方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ (A は $m \times n$ 行列, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$) において, $\tilde{A} = (A|\mathbf{b})$ を拡大係数行列とする. 方程式に解が存在するための必要十分条件は,

$$\mathrm{rank}\,\tilde{A} = \mathrm{rank}\,A$$

と表される. また, 方程式に解が存在するとき (従って上の等式が成り立つとき), ただ一つの解が存在するための必要十分条件は,

$$n = \mathrm{rank}\,A$$

と表される. ただし, n は連立方程式の変数 $(x, y, z, \dots)$ の個数を表す.

[0]※この講義に関する情報はホームページを参照. http://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2024/la1.html