基礎数理 C, 第 8 回演習問題

2024/6/27 担当：那須

$\boxed{1}$ 次の 2 次形式の符号を求めよ.

(1) $q(x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_1x_2 - x_2^2$.

(2) $q(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 - 2x_2x_3 - x_3^2$.

$\boxed{2}$ 次の 2 次形式の符号を求めよ. また, 標準化を行え.

(1) $q(x_1, x_2) = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2$.

(2) $q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_3 + x_2^2 + 2x_2x_3$.

$\boxed{3}$ 次の 2 次形式は正定値 2 次形式であることを示せ.

(1) $q(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2$.

(2) $q(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 + x_3^2$.

---

[2]解答：

$\boxed{1}$ (1) $(1, 1)$ (2) $(1, 1)$

$\boxed{2}$ (1) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ とおくと $q(x_1, x_2) = A[\mathbf{x}]$ と表せる. $P = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ とおくと, P は直交行列であり, A は ${}^tPAP = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ と対角化される. よって q の符号は $(1, 0)$ である. 直交変数変換 $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ を考えると $q(x_1, x_2) = 2y_1^2$ と対角化される. さらに, $\Lambda = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とおくと, 変数変換 $\mathbf{x} = P\Lambda\mathbf{z}$ により, $q(x_1, x_2) = z_1^2$ と標準化される.

(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ とおくと $q(x_1, x_2, x_3) = A[\mathbf{x}]$ と表せる. $P = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -\sqrt{3} & \sqrt{2} & -1 \\ \sqrt{3} & \sqrt{2} & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}$ とおくと, P は直交行列であり, A は ${}^tPAP = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ と対角化される. よって q の符号は $(2, 1)$ である. 直交変数変換 $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ を考えると $q(x_1, x_2, x_3) = y_1^2 + 2y_2^2 - y_3^2$ と対角化される. さらに, $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とおくと, 変数変換 $\mathbf{x} = P\Lambda\mathbf{z}$ により, $q(x_1, x_2, x_3) = z_1^2 + z_2^2 - z_3^2$ と標準化される.

$\boxed{3}$ 2 次形式を対称行列 A を用いて表し, A の主小行列式を計算して正になることを示せば良い. (省略)

[2]※この講義に関する情報はホームページを参照. http://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2024/bmc.html