基礎数理 C, 第 6 回演習問題

2024/6/13　担当：那須

$\boxed{1}$ 次の実対称行列 A を直交行列を用いて対角化せよ.[2]

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$　(2) $A = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$　(3) $A = \begin{pmatrix} 7 & 12 \\ 12 & 0 \end{pmatrix}$　(4) $A = \begin{pmatrix} 15 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

$\boxed{2}$ 次の実対称行列 A を直交行列を用いて対角化せよ.

(1) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　(2) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

---

[2]「直交行列を $P = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$ にとると, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$ となる」のように答えること.

[2]解答：

$\boxed{1}$ 次の解は 1 つの正解例であることに注意 (正解は 1 通りではない.)

(1) 直交行列を $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$ にとると $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ となる.

(2) 直交行列を $P = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{13}} & -\frac{3}{\sqrt{13}} \\ \frac{3}{\sqrt{13}} & \frac{2}{\sqrt{13}} \end{pmatrix}$ にとると $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ となる.

(3) 直交行列を $P = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$ にとると $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & -9 \end{pmatrix}$ となる.

(4) 直交行列を $P = \begin{pmatrix} \frac{4}{\sqrt{17}} & -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \frac{1}{\sqrt{17}} & \frac{4}{\sqrt{17}} \end{pmatrix}$ にとると $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ となる.

$\boxed{2}$ 次の解は 1 つの正解例であることに注意 (正解は 1 通りではない.)

(1) 直交行列を $P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ にとると $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ となる.

(2) 直交行列を $P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$ にとると $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ となる.

[2]※この講義に関する情報はホームページを参照. http://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2024/bmc.html