

1 次の実対称行列 A を直交行列を用いて対角化せよ.¹

$$(1) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (2) A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (3) A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(4) A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (5) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

¹「直交行列を $P = \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}$ にとると, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}$ となる」のように答えること.

¹解答:

1 次の実対称行列 A を直交行列を用いて対角化せよ. (正解は 1 通りではない.)

$$(1) \text{ 直交行列を } P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \text{ にとると } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ となる.}$$

$$(2) \text{ 直交行列を } P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \text{ にとると } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ となる.}$$

$$(3) \text{ 直交行列を } P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\sqrt{\frac{2}{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \text{ にとると } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ となる.}$$

$$(4) \text{ 直交行列を } P = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{35}} & \frac{3}{\sqrt{14}} & -\frac{1}{\sqrt{10}} \\ \sqrt{\frac{5}{7}} & -\sqrt{\frac{2}{7}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{35}} & \frac{1}{\sqrt{14}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} \text{ にとると } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ となる.}$$

$$(5) \text{ 直交行列を } P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 \end{pmatrix} \text{ にとると } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ となる.}$$

¹※この講義に関する情報はホームページを参照. <http://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2024/bmc.html>