基礎数理 C, 第 4 回演習問題

2024/5/9 担当：那須

$\boxed{1}$ 次の行列は直交行列であることを示せ.

(1) $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ (2) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ (3) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\boxed{2}$ 次の行列が直交行列になるように定数 a, b の値を定めよ: (1) $\begin{pmatrix} a & -b \\ a & b \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & b \end{pmatrix}$

$\boxed{3}$ 次のベクトルの定める $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^4$ または $\mathbb{R}[x]_2$ の基底をシュミットの方法を用いて正規直交化せよ.

(1) $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},$

(2) $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$

(3) $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},$

(4) $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$

(5) $f_1 = x^2,\ f_2 = x,\ f_3 = 1$

$\boxed{4}$ P, Q が直交行列ならば, 積 PQ, および逆行列 P^{-1} も直交行列であること示せ.

---

[0]解答：

$\boxed{1}$ 与えられた行列を A として, A^tA が単位行列になることを確認する.

$\boxed{2}$ (1) $(a,b) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\pm 1, \pm 1)$ (複合任意) (2) $(a,b) = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$

$\boxed{3}$ (1) $\left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$ (2) $\left\{ \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$

(3) $\left\{ \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \right\}$ (4) $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \right\}$

(5) $\left\{ \sqrt{\frac{5}{2}}x^2, \sqrt{\frac{3}{2}}x, \frac{3-5x^2}{2\sqrt{2}} \right\}$

$\boxed{4}$ 教科書 p.120, 問題 6.2-5,6 参照

[0]※この講義に関する情報はホームページを参照. http://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2024/bmc.html