

以下では \mathbb{R}^3 に標準内積が定義されているとする.

1 次のベクトルの内積を計算せよ.

$$(1) \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ -3 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad (2) \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} -9 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix} \quad (3) \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 9 \\ 10 \\ -11 \end{bmatrix}$$

2 次のベクトルは直交することを示せ.

$$(1) \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (2) \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

3 次のベクトル \mathbf{x} のノルム $\|\mathbf{x}\|$ を計算せよ.

$$(1) \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -9 \end{bmatrix} \quad (2) \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ -6 \\ -2 \end{bmatrix} \quad (3) \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -11 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

4 次のベクトルの組が直交するように定数 a の値を定めよ.

$$(1) \begin{bmatrix} 2 \\ a-1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (2) \begin{bmatrix} -a \\ 1-a \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

5 $\mathbb{R}[x]_2$ に $\langle f(x), g(x) \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$ により内積 $\langle f(x), g(x) \rangle$ を定義する. 次の $f(x)$ と $g(x)$ に対し, $\langle f(x), g(x) \rangle$ を計算せよ.

$$(1) f(x) = x^2 + 1, g(x) = x + 2$$

$$(2) f(x) = x^2 + x + 1, g(x) = x^2 - x + 1$$

$$(3) f(x) = x^2 - 1, g(x) = x^3 - x + 1$$

0解答:

$$1 (1) -15 \quad (2) -51 \quad (3) 103$$

$$2 \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \rangle = 0 \text{ を確認する.}$$

$$3 (1) \sqrt{107} \quad (2) 2\sqrt{14} \quad (3) \sqrt{131}$$

$$4 (1) a = 2 \quad (2) a = -1$$

$$5 (1) \frac{16}{3} \quad (2) \frac{46}{15} \quad (3) -\frac{4}{3}$$