

## 第4回 連立方程式と基本変形

本日の講義の目標

### 目標 4

- ① 連立方程式の (拡大) 係数行列を用いた表し方について理解する.
- ② 行列の (行) 基本変形について理解する.
- ③ 基本変形による連立方程式の解法 (唯一解の場合) について理解する.

## 連立方程式と(拡大)係数行列

$$\begin{cases} 2x + 4y = 8 \\ -3x + 5y = -1 \end{cases} \cdots (\heartsuit) \quad \text{や} \quad \begin{cases} x + 2y + 2z = 2 \\ 3x + 8y + 4z = 6 \\ 2x + 8y + z = 5 \end{cases} \cdots (\clubsuit)$$

のような方程式を(一次) **連立方程式** という.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \end{pmatrix}$$

とおくと(♥)は式  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  により表せる. 同様に

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 8 & 4 \\ 2 & 8 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

とおくと(♣)も式  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  により表せる. 一般に連立方程式は, 適当な行列  $A$  と変数ベクトル  $\mathbf{x}$ , 方程式の右辺の数を成分とするベクトル  $\mathbf{b}$  を用いて

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

と(一意に)表せる.

## 連立方程式と拡大係数行列 2

### 定義 4.1

((♡) や (♣) のように) 連立方程式を  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  と表すとき,  $A$  を方程式の**係数行列** といい,  $A$  と  $\mathbf{b}$  を  $|$  により区切って並べた行列

$$\tilde{A} = (A \mid \mathbf{b})$$

を方程式の**拡大係数行列**という. ( $\tilde{A}$  の  $\sim$  は “チルダ” と読む.)

(♡) と (♣) の拡大係数行列はそれぞれ

$$\tilde{A} = \left( \begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 8 \\ -3 & 5 & -1 \end{array} \right) \quad \text{と} \quad \tilde{A} = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 8 & 2 \\ 3 & 8 & 4 & 6 \\ 2 & 8 & 1 & 5 \end{array} \right)$$

で与えられる.

## 連立方程式と拡大係数行列 3

### 例題 4.2

$$\text{連立方程式} \begin{cases} x - y = 1 \\ y - z = 2 \\ z - x = 3 \end{cases} \quad \text{の拡大係数行列 } \tilde{A} \text{ を求めよ.}$$

解答)

$$\tilde{A} = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

## 連立方程式と拡大係数行列 4

連立方程式

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \cdots \textcircled{1} \\ 2x + 3y = 8 \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

を解く. ② から ① の 2 倍を引く (② + (-2) × ①) と,

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \cdots \textcircled{1}' \\ -y = -2 \cdots \textcircled{2}' \end{cases}$$

となる. ②' を (-1) 倍する (②' × (-1)) と,

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \cdots \textcircled{1}'' \\ y = 2 \cdots \textcircled{2}'' \end{cases}$$

最後に ②'' から ①'' の 2 倍を引く (①'' + (-2) × ②'') と方程式の解を得る:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2. \end{cases}$$

## 連立方程式と拡大行列5

連立方程式  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  と拡大係数行列  $\tilde{A} = (A \mid \mathbf{b})$  は本質的に同じものを表すので、係数行列  $\tilde{A}$  の変化を見る。

$$\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x + 2y = 5 \\ 2x + 3y = 8 \end{array} \right. \\ \xrightarrow{\textcircled{2} + (-2) \times \textcircled{1}} \left\{ \begin{array}{l} x + 2y = 5 \\ -y = -2 \end{array} \right. \\ \xrightarrow{\textcircled{2} \times (-1)} \left\{ \begin{array}{l} x + 2y = 5 \\ y = 2 \end{array} \right. \\ \xrightarrow{\textcircled{1} + (-2) \times \textcircled{2}} \left\{ \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 2. \end{array} \right. \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 8 \end{array} \right) \\ \xrightarrow{\textcircled{2} + (-2) \times \textcircled{1}} \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & -2 \end{array} \right) \\ \xrightarrow{\textcircled{2} \times (-1)} \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \\ \xrightarrow{\textcircled{1} + (-2) \times \textcircled{2}} \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \end{array}$$

連立方程式を解くためには、係数行列が単位行列になるように“変形”を行えば良い!

# 行列の基本変形

行列の基本変形は、拡大係数行列に限らず、一般の行列に対し定義される。

## 定義 4.3 ((行) 基本変形)

行列の次の3つの変形を **(行) 基本変形** という:

- ① 1つの行に0でない数をかける. (例: ②  $\times$  (-1))
- ② 1つの行に他の行の何倍かを加える. (例: ②  $+$  (-2)  $\times$  ①)
- ③ 2つの行を交換する. (例: ①  $\leftrightarrow$  ②)

基本変形は可逆的であり、基本変形を行って得られる連立方程式は、全て同じ解の集合を持つことに注意する。

## 定理 4.4

拡大係数行列の基本変形を行っても、連立方程式の解は変わらない。

行列  $A$  に (いくつかの) 基本変形を行い行列  $B$  が得られるとき、 $A \longrightarrow B$  を表す。

## 例 4.5

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{②} - 3 \times \text{①}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

## 例題 4.6

$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  に対し以下の基本変形を行え.

- ①  $A$  の 2 行目を 2 倍する (②  $\times 2$ ).
- ②  $A$  の 1 行目を  $(-2)$  倍して, 3 行目に加える (③  $+ ① \times (-2)$ ).
- ③  $A$  の 2 行目と 3 行目を入れ替える (②  $\leftrightarrow$  ③).

解答)

$$\textcircled{1} A \xrightarrow{\textcircled{2} \times 2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \\ 4 & -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{2} A \xrightarrow{\textcircled{3} + \textcircled{1} \times (-2)} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{3} A \xrightarrow{\textcircled{2} \leftrightarrow \textcircled{3}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$



# 掃き出し法1

行列の基本変形を用いた連立方程式の解法を**掃き出し法**という。

## 例題 4.7

行列の基本変形を用いて、連立1次方程式 
$$\begin{cases} x + y - z = 4 \\ 2x - y + 3z = -3 \\ x + 2y + 4z = 1 \end{cases}$$
 を解け。

**解答)** 方程式の拡大係数行列  $\tilde{A}$  は次のように基本変形される:

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & -3 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\textcircled{3}-\textcircled{1}]{\textcircled{2}-2\times\textcircled{1}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -3 & 5 & -11 \\ 0 & 1 & 5 & -3 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{\textcircled{2}\leftrightarrow\textcircled{3}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & -3 \\ 0 & -3 & 5 & -11 \end{array} \right) \xrightarrow[\textcircled{3}+3\times\textcircled{2}]{\textcircled{1}-\textcircled{2}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -6 & 7 \\ 0 & 1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 20 & -20 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{\textcircled{3}\times\frac{1}{20}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -6 & 7 \\ 0 & 1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow[\textcircled{2}-5\times\textcircled{3}]{\textcircled{1}+6\times\textcircled{3}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right). \end{aligned}$$

よって求める方程式の解は  $x = 1, y = 2, z = -1$  である。

## 掃き出し法2

### 定理 4.8

連立方程式

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (\heartsuit)$$

の拡大係数行列を  $\tilde{A} = (A \mid \mathbf{b})$  とする.  $\tilde{A}$  に (いくつかの) 行基本変形を行い

$$\tilde{A} \longrightarrow (E \mid \mathbf{b}')$$

となるとき,  $(\heartsuit)$  の解は  $\mathbf{x} = \mathbf{b}'$  に等しい. ただし  $E$  は単位行列を表す.