

## 第3回 行列とその演算

本日の講義の目標

### 目標 3

- ① 行列の定義について理解し, “行” や “列” などの用語を覚える.
- ② 行列の演算 (和, スカラー倍, 積) について理解する.

# 行列の定義

## 定義 3.1

$m, n$  を自然数とする.  $mn$  個の数 (スカラー)  $a_{ij}$  ( $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ ) を以下のようにならべ () または [] でくくったものを  $m$  行  $n$  列の**行列** (または  $m \times n$  行列) という:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{または} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

この  $a_{ij}$  を  $A$  の  $(i, j)$  **成分** という. 行列の横のならば  $(a_{i1} \ a_{i2} \ \cdots \ a_{in})$  を  $A$  の行といい, 上から  $i$  番目の行を**第  $i$  行** という. また縦のならば  $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$  を  $A$  の列といい, 左から  $j$  番目の列を**第  $j$  列** という.  $A$  に対し,  $(m, n)$  を  $A$  の**型** (または**サイズ**) という.

## 行列の例と特別な行列

### 例 3.2

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$  は  $2 \times 3$  行列 (2 行 3 列の行列) である.  $A$  の第 2 行は  $(4 \ 5 \ 0)$  であり, 第 3 列は  $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$  であり,  $A$  の  $(2, 1)$  成分は 4,  $(1, 3)$  成分は 3 である.

行列を表すとき, 通常  $A, B, C, \dots$  などのアルファベットの **大文字** を用いる. 文字は自由に選んで良いが,  $O$  と  $E$  は特別な行列に割り当てられる (cf. 定義 3.3).

### 定義 3.3

全ての成分が 0 に等しい行列  $O$  を **零行列** という.  $m = n$  を満たす行列  $A$  を ( $n$  次) **正方行列** という. 正方行列のうち, **対角成分** が 1 で残りの成分が 0 の行列  $E$  を **単位行列** という.

$$O = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

## 行列の演算

$a_{ij}$  を  $(i, j)$  成分とする  $m \times n$  行列  $A$  を  $A = (a_{ij})$  と表す. 例えば  $n$  次正方行列  $(a_{ij})$  を  $a_{ij} = 1$  ( $i = j$ ) かつ  $a_{ij} = 0$  ( $i \neq j$ ) により定めれば,  $(a_{ij})$  は単位行列  $E$  (定義 3.3) に等しい.

### 定義 3.4 (行列の和とスカラー倍)

サイズ ( $= m \times n$ ) の等しい行列  $A = (a_{ij})$  と  $B = (b_{ij})$  に対し, 和  $A + B$  を

$$A + B =: \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij} + b_{ij})$$

により定義し, スカラー  $\lambda$  に対し  $\lambda A$  を

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix} = (\lambda a_{ij})$$

により定義する.

### 例 3.5

$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  かつ  $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  のとき,

$$2A + 3B = 2 \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

行列  $A$  と行列  $B$  の積は、 $A$  の列数と  $B$  の行数が等しいときにのみ定義される。

### 定義 3.6 (行列の積)

$m \times n$  行列  $A = (a_{ij})$  と  $n \times l$  行列  $B = (b_{jk})$  に対し、 $m \times l$  行列  $AB = (c_{ij})$  を

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

により定義する。

$$AB = \begin{pmatrix} & \vdots & \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ & \vdots & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & b_{1j} & \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ & b_{nj} & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & c_{ij} & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix}$$

$AB$  の  $(i, j)$  成分  $c_{ij}$  は  $A$  の第  $i$  行  $\mathbf{a}_i$  と  $B$  の第  $j$  列の  $\mathbf{b}_j$  の内積  $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{b}_j$  に等しい。

### 例 3.7

$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$  のとき,

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \times 0 + (-2) \times 1 & 1 \times 1 + (-2) \times (-1) & 1 \times 0 + (-2) \times 0 \\ 0 \times 0 + 1 \times 1 & 0 \times 1 + 1 \times (-1) & 0 \times 0 + 1 \times 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$B$  の列の数 (= 3) と  $A$  の行の数 (= 2) が異なるため, 積  $BA$  は定義されない.

行列の演算も数の演算とよく似た性質をもつが、いくつかの“著しく”異なる性質があるので注意する:

- 和, 差, 積が定義されるとは限らない ( $A, B$  の型に依存する). (cf. 例 3.7)
- 積  $AB$  と  $BA$  がともに定義されたとしても, 一般には  $AB \neq BA$  である.

### 例題 3.8

$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$  のとき, 積  $AB$  と積  $BA$  を計算せよ.

解答)

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & -10 \\ 16 & 26 \end{pmatrix}.$$

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 4 \\ 26 & 4 \end{pmatrix}.$$

# 行列の演算の性質

結合律や分配律などの“数”の持つ演算の性質は行列でも成立する.

- $A + B = B + A, A + O = A$
- $(A + B) + C = A + (B + C)$  (和に関する結合律)
- $AE = EA = A, AO = O, OA = O$
- $(AB)C = A(BC)$  (積に関する結合律)
- $0A = O, 1A = A, (ab)A = a(bA), (aA)B = a(AB)$
- $a(A + B) = aA + aB, (a + b)A = aA + bA,$
- $A(B + C) = AB + AC, (A + B)C = AC + BC$  (分配律)