第 2 回 直線と平面の方程式

本日の講義の目標

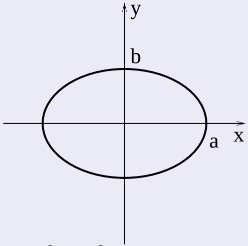
目標 2

1. 直線の方程式について理解する.
2. 平面の方程式について理解する.

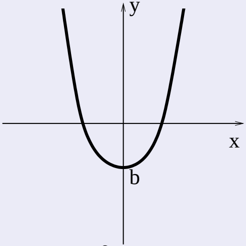
図形と方程式

中学では *1* **次関数のグラフ** *(***直線***)* を中心に方程式と図形の関係を学び, 高校では *2* **次関数のグラフ**や**楕円**, **双曲線**, **放物線**などの図形を方程式で表す方法について学んだ. 本講義では平面や空間における直線と平面について学ぶ.

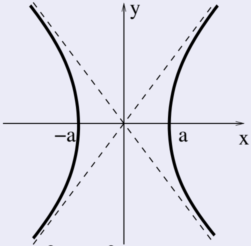
例 2.1 (図形と方程式)



(a) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-1=0$ (楕円)



(b) $y - ax^2 - b = 0$ (放物線)



(c) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}-1=0$ (双曲線)

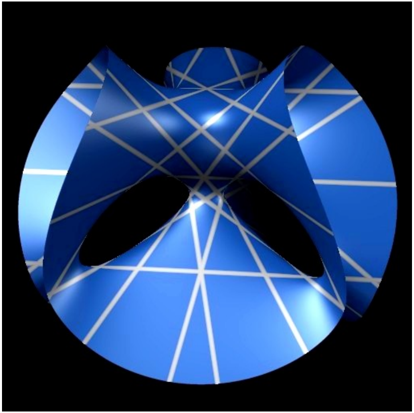
Figure: 2 次曲線 (円錐曲線)

方程式が複雑になると...

In projective three-space with homogeneous coordinates $(x : y : z : w)$, Clebsch's cubic is given by the equation

$$x^3 + y^3 + z^3 + w^3 - (x + y + z + w)^3 = 0.$$

The following picture shown below was made by Stephan Endrass using his program SURF(cf. http://surf.sourceforge.net).



平面における直線の方程式

命題 2.2

xy-平面の直線の方程式は, 一般的に

$$ax + by + c = 0, \qquad (\text{ただし } a \neq 0 \text{ または } b \neq 0)$$

と表される. とくに直線の方程式は次のように式変形可能である:

1. 傾きが m かつ点 (p, q) を通る: $y = m(x - p) + q$.
2. 2 点 (p_1, q_1) と (p_2, q_2) を通る: $(q_2 - q_1)(x - p_1) - (p_2 - p_1)(y - q_1) = 0$.

例 2.3

1. 平面において, 点 $(1, 2)$ を通り, 傾きが 3 の直線の方程式は $y = 3(x - 1) + 2$ で与えられる. 式を整理して $y = 3x - 1$ (または $3x - y - 1 = 0$).
2. 平面において, 2 点 $(1, 2), (3, 4)$ を通る直線の方程式は,

$$y = \frac{4 - 2}{3 - 1}(x - 1) + 2$$

で与えられる. 式を整理すると, $y = x + 1$ (または $x - y + 1 = 0$).

法線ベクトルを用いた直線と平面の方程式

定義 2.4

平面や空間において直線 ℓ や平面 H と直行する非零ベクトル $\mathbf{n}$ を ℓ や H の**法線ベクトル**という．法線ベクトルは ℓ や H に対し，定数倍を除いて唯一通りに定まる．

命題 2.5

平面における直線 ℓ が，点 $\mathbf{x}_0$ を通り，法線ベクトル $\mathbf{n}$ を持つとき ℓ の方程式は

$$(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{n} = 0 \tag{2.1}$$

と表される．一方，空間内の平面 H が，点 $\mathbf{x}_0$ を通り，法線ベクトル $\mathbf{n}$ を持つとき H の方程式も同じ式 (2.1) で表される．

(2.1) のような方程式を (直線 ℓ や平面 H の) **ベクトル方程式**という．式 (2.1) は変数の個数によらず，n 次元空間内の $(n-1)$ 次元**超平面**を定義する優れた方程式である．

空間における平面の方程式

命題 2.6

xyz-空間における平面の方程式は，一般的に

$$ax + by + cz + d = 0, \qquad (\text{ただし } (a, b, c) \neq (0, 0, 0))$$

と表される．とくに点 (p, q, r) を通り，法線ベクトル (a, b, c) をもつ平面の方程式は

$$a(x - p) + b(y - q) + c(z - r) = 0 \tag{2.2}$$

で与えられる．

例題 2.7

空間において点 $(1, 2, 3)$ を通り，法線ベクトル $(4, 5, 6)$ をもつ平面の方程式を求めよ．

解答) $\mathbf{x} = (x, y, z)$, $\mathbf{x}_0 = (1, 2, 3)$, $\mathbf{n} = (4, 5, 6)$ とおけば

$$(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{n} = (x - 1, y - 2, z - 3) \cdot (4, 5, 6) = 4x + 5y + 6z - 32.$$

よって求める方程式は $4x + 5y + 6z - 32 = 0$.

空間における直線の方程式

空間内の直線 ℓ に対し, ℓ と平行な非零ベクトルを ℓ の**方向ベクトル**という. 方向ベクトルは ℓ に対し, 定数倍を除き唯一通りに定まる.

命題 2.8

xyz-空間内の直線 ℓ が, 点 (p, q, r) を通り, 方向ベクトル $\mathbf{d} = (a, b, c)$ (ただし $abc \neq 0$ とする) を持つとき ℓ の方程式は

$$\frac{x-p}{a} = \frac{y-q}{b} = \frac{z-r}{c} \tag{2.3}$$

で与えられる.

方向ベクトル $\mathbf{d}$ が 0 を成分に含む, 例えば $c = 0$ の場合に ℓ の方程式は

$$\frac{x-p}{a} = \frac{y-q}{b}, \qquad z - r = 0 \tag{2.4}$$

で与えられる. 式 (2.3) も (2.4) も 2 枚の平面の**交わり *(*共通部分*)*** として表されることに注意する.

例題 2.9

1. xyz-空間内において, 点 $(1, -1, 0)$ を通り, 方向ベクトル $\mathbf{a} = (2, 3, 4)$ をもつ直線 ℓ の方程式を求めよ.
2. xyz-空間内において, 点 $(2, 5, 1)$ を通り, 法線ベクトル $\mathbf{n} = (2, 1, -3)$ をもつ平面 H の方程式を求めよ.
3. ℓ と H の交点の座標を求めよ.

解答)

1. ℓ の方程式は $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z}{4}$.
2. $2(x-2) + (y-5) - 3(z-1) = 2x + y - 3z - 6$. したがって H の方程式は $2x + y - 3z - 6 = 0$.
3. ℓ の方程式をパラメータ t を用いて表せば,

$$x = 2t + 1, \quad y = 3t - 1, \quad z = 4t.$$

H の方程式に代入し t について解くと $t = -1$. よって ℓ と H の交点の座標は $(-1, -4, -4)$.

例題 2.10

xyz-空間内の 3 点 $A(-1,1,1)$, $B(1,-1,1)$, $C(1,1,-1)$ を通る平面 H の方程式を求めよ.

解答) $\overrightarrow{AB} = (1,-1,1) - (-1,1,1) = (2,-2,0)$. $\overrightarrow{AC} = (1,1,-1) - (-1,1,1) = (2,0,-2)$. したがって H の法線ベクトルは

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (2,-2,0) \times (2,0,-2) = (4,4,4) = 4(1,1,1).$$

H は点 $A(-1,1,1)$ を通るので, H の方程式は

$$1(x+1) + 1(y-1) + 1(z-1) = 0.$$

式を整理して $x+y+z-1=0$ となる.