# 第 11 回 余因子行列と逆行列

本日の講義の目標

**目標 11**

1. 余因子展開の一般化について理解する.
2. 余因子行列と逆行列について理解する.

# 行列式の余因子展開 (復習)

$A$ を $n$ 次行列とする. $A$ から $i$ 行 $j$ 列を取り除いた行列式 $D_{ij}$ を $A$ の *(i,j)* **小行列式**と呼び, $\Delta_{ij} := (-1)^{i+j} D_{ij}$ で定義される式を $A$ の *(i,j)* **余因子**と呼んだ.

$A$ のある行 (または列) において, 成分と対応する余因子を掛け合わせて加えると $A$ の行列式 $|A|$ の値に等しい.

## 例 11.1 (行列式の余因子展開)

$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 7 & 2 & -1 \\ 6 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ のとき,

$$\begin{aligned} |A| &= 5 \cdot \Delta_{11} + 1 \cdot \Delta_{12} + 2 \cdot \Delta_{13} \qquad (①\text{で展開}) \\ &= 5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \left( - \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} \right) + 2 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 5 \cdot 3 + 1 \cdot (-13) + 2 \cdot (-5) \\ &= -8. \end{aligned}$$

# 基本変形との合わせ技

行列式を展開する前に行列式の基本変形 (掃き出し法) により, 成分に $0$ を多く含む行 (または列) を作ると良い.

## 例 11.2

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 7 & 2 & -1 \\ 6 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[\text{③}-\text{①}]{\text{②}-2\times\text{①}} \begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & -5 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal{\boxed{2}\text{で展開}} 1 \cdot \left( - \begin{vmatrix} -3 & -5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \right) = -8.$$

行列式を “効率的に計算” するためには,

- 行列式の余因子展開
- 掃き出し法 (基本変形)

をうまく組み合わせると良い.

# 問題

## 定理 11.3 (行列式の余因子展開 (再掲))

$A = (a_{ij})$ の $(i, j)$ 余因子を $\Delta_{ij}$ とする．このとき次が成り立つ:

$$|A| = a_{i1}\Delta_{i1} + \cdots + a_{in}\Delta_{in} \qquad \text{(第 } i \text{ 行に関する展開)} \tag{11.1}$$

$$|A| = a_{1j}\Delta_{1j} + \cdots + a_{nj}\Delta_{nj} \qquad \text{(第 } j \text{ 列に関する展開)} \tag{11.2}$$

## 問題 11.4

式 (11.1) の右辺において, $A$ の成分 $a_{i1}, \ldots, a_{in}$ (第 $i$ 行の成分) を $k \neq i$ に対し, それぞれ $a_{k1}, \ldots, a_{kn}$ (第 $k$ 行の成分) に置き換えた式

$$a_{k1}\Delta_{i1} + \cdots + a_{kn}\Delta_{in} \qquad (k \neq i)$$

は何を表すか?

# 実験と考察

## 例 11.5

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 7 & 2 & -1 \\ 6 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5\Delta_{11} + 1\Delta_{12} + 2\Delta_{13}.$$

右辺の第 1 行の成分である $5, 1, 2$ を第 2 行の成分である $7, 2, -1$ に置き換えると,

$$\begin{vmatrix} 7 & 2 & -1 \\ 7 & 2 & -1 \\ 6 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 7\Delta_{11} + 2\Delta_{12} + (-1)\Delta_{13}.$$

となる. 左辺の行列式は第 1 行と第 2 行が等しいので, 行列式の交代性 (命題 9.2) により, 右辺の式の値は<u>0 に等しい</u>.

つまり

$$k \neq i \Longrightarrow a_{k1}\Delta_{i1} + \cdots + a_{kn}\Delta_{in} = 0$$

がわかる.

# 余因子展開の一般化

定理 11.3 は次のように一般化される.

## 定理 11.6

$n$ 次行列 $A = (a_{ij})$ とその余因子 $\Delta_{ij}$ $(1 \leq i, j \leq n)$ に対し, 次が成り立つ:

$$a_{i1}\Delta_{j1} + \cdots + a_{in}\Delta_{jn} = \begin{cases} |A| & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

$$a_{1j}\Delta_{1k} + \cdots + a_{nj}\Delta_{nk} = \begin{cases} |A| & (j = k) \\ 0 & (j \neq k) \end{cases}$$

上の定理は第 $i$ 行の成分に第 $j$ 行の余因子を掛けて足し合わせるとき, $i = j$ ならば行列式 $|A|$ に等しくなるが, $i \neq j$ のときは 0 になることを意味する.

## 例題 11.7

3 次行列 $A = (a_{ij})$ とその余因子 $\Delta_{ij}$ $(1 \leq i, j \leq 3)$ に対し, 次の行列の積を計算せよ:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \Delta_{31} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \Delta_{32} \\ \Delta_{13} & \Delta_{23} & \Delta_{33} \end{pmatrix}$$

**解)**　求める行列の $(1, 1)$ 成分は

$$a_{11}\Delta_{11} + a_{12}\Delta_{12} + a_{13}\Delta_{13}$$

に等しく, この式は $A$ の第 1 行に関する余因子展開の式に等しい. 同様に対角成分は $|A|$ に等しい. 一方, $(1, 2)$ 成分は

$$a_{11}\Delta_{21} + a_{12}\Delta_{22} + a_{13}\Delta_{23}$$

に等しく, 定理 11.6 より 0 に等しい. 同様に $i \neq j$ のとき $(i, j)$ 成分は 0 に等しい. したがって求める行列は

$$\begin{pmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{pmatrix} = |A|E_3.$$

# 余因子行列

## 定義 11.8

正方行列 $A=(a_{ij})$ に対し，$A$ の $(i,j)$ 余因子 $\Delta_{ij}$ を $(i,j)$ 成分にもつ行列 $(\Delta_{ij})$ の転置行列

$$\operatorname{adj}(A) := {}^t(\Delta_{ij}) = \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \cdots & \Delta_{n1} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \cdots & \Delta_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_{1n} & \Delta_{2n} & \cdots & \Delta_{nn} \end{pmatrix}$$

を $A$ の**余因子行列**，**または随伴行列** *(adjugate matrix)* という．

例題 11.7 と同様に次が成り立つ．

## 定理 11.9

$A$ を正方行列とし，$\operatorname{adj}(A)$ を $A$ の随伴行列とする．このとき

$$A\operatorname{adj}(A) = \operatorname{adj}(A)A = |A|E,$$

(ただし $E$ は単位行列) が成り立つ．

# 逆行列への応用

定理 11.9 より次の系を得る．

## 系 11.10

正方行列 $A$ に対し，$|A| \neq 0$ ならば $A$ は正則行列であり，

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\,\mathrm{adj}(A).$$

## 注意 11.11

- 実は「$A$ が正則 $\Longleftrightarrow |A| \neq 0$」が成り立つ (定理 12.2).
- 逆行列の計算において，一般的に掃き出し法による求め方 (定理 7.8) が系 11.10 よりも便利である．しかし理論的な場合や行列に文字が含まれる場合などには後者が便利である．

## 例題 11.12

行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ の逆行列 $A^{-1}$ を求めよ.

**解答)**　例題 10.4 より,$(\Delta_{ij}) = \begin{pmatrix} -6 & -2 & 5 \\ 10 & 1 & -6 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ である. 一方 $A$ の行列式 $|A|$ の値は $|A| = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} \overset{①-2\times③}{\underset{②-2\times③}{=\!=\!=\!=}} \begin{vmatrix} 0 & -6 & -1 \\ 0 & -5 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} \overset{\boxed{1}\text{で展開}}{=\!=\!=\!=} \begin{vmatrix} -6 & -1 \\ -5 & -2 \end{vmatrix} =$ $(-6)(-2) - (-5)(-1) = 7$ と計算され, $|A| \neq 0$ となる. したがって系 11.10 より

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\,\mathrm{adj}(A) = \frac{1}{|A|}\,{}^{t}(\Delta_{ij}) = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -6 & 10 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 5 & -6 & 2 \end{pmatrix}.$$