

1 次の行列を行基本変形により簡約化し, 階数を求めよ.

(1) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -6 & 9 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -5 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

2 次の連立1次方程式を基本変形(掃き出し法)を用いて解け.

(1) $\left(\begin{array}{cc|c} x & y & -1 \\ 3 & 5 & -1 \\ 7 & 12 & 1 \end{array}\right)$ (2) $\left(\begin{array}{cc|c} x & y & -6 \\ 4 & 6 & -6 \\ -8 & -12 & 12 \end{array}\right)$ (3) $\left(\begin{array}{ccc|c} x & y & z & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 2 \\ 2 & 7 & 13 & 5 \\ -3 & -9 & -15 & -6 \end{array}\right)$

(4) $\left(\begin{array}{ccc|c} x & y & z & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 7 & 10 \\ 4 & 8 & 6 & 10 \end{array}\right)$ (5) $\left(\begin{array}{cccc|c} x & y & z & w & -4 \\ 1 & 2 & -3 & -4 & -4 \\ -2 & -6 & 7 & 7 & 6 \\ 3 & 7 & -7 & -9 & -6 \\ -4 & -5 & 13 & 20 & 24 \end{array}\right)$ (6) $\left(\begin{array}{cccc|c} x & y & z & w & -4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & -7 & -5 & -18 \\ 3 & 6 & 7 & 18 & 34 \\ -4 & -8 & -15 & -10 & -37 \end{array}\right)$

3 次の連立1次方程式の解の個数がどのようなになっているか調べよ.

答えは「1: 解無し」, 「2: 解は無有限個ある」, 「3: 解は唯一」の3つの中から選択せよ.

(1) $\left(\begin{array}{ccc|c} x & y & z & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right)$ (2) $\left(\begin{array}{ccc|c} x & y & z & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & 1 & -3 \\ -3 & 13 & 5 & 1 \end{array}\right)$ (3) $\left(\begin{array}{ccc|c} x & y & z & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$

4 次の連立1次方程式が解をもつための a, b の条件を求めよ. (教科書 p.33, 問題 2.3-2)

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ b \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$

⁰解答:

1 基本変形は省略. 簡約化と階数(rank)のみ記す.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 階数は1 (2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 階数は3 (3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 階数は2

2 (1) $x = -17, y = 10$ (2) $x = -\frac{3+3t}{2}, y = t$ (t は任意) (3) $x = -1 + 4t, y = 1 - 3t, z = t$ (t は任意)
 (4) $x = 1 - 2t, y = t, z = 1$ (t は任意) (5) $x = -2 + 3t, y = 2 - t, z = 2 - t, w = t$ (t は任意) (6) 解なし

3 (1) 解なし (2) 解は無有限個ある (3) 解は唯一

4 (1) $a + 2b = 1$ (2) $a \neq 2$

ポイント!

連立方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ (A は $m \times n$ 行列, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$) において, $\tilde{A} = (A|\mathbf{b})$ を拡大係数行列とする. 方程式に解が存在するための必要十分条件は,

$$\text{rank } \tilde{A} = \text{rank } A$$

と表される. また, 方程式に解が存在するとき(従って上の等式が成り立つとき), ただ一つの解が存在するための必要十分条件は,

$$n = \text{rank } A$$

と表される. ただし, n は連立方程式の変数 (x, y, z, \dots) の個数を表す.