# 線形代数１, 第12回演習問題

2023/7/13 担当：那須

1 次の行列式を計算せよ.

(1) $\begin{vmatrix} 12 & 9 \\ 13 & 8 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 10 \\ 0 & -7 & 11 \\ 5 & 8 & -12 \end{vmatrix}$ (3) $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 7 \\ 0 & 5 & 9 \\ 2 & -11 & 13 \end{vmatrix}$ (4) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$

(5) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ (6) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$ (7) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 5 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -3 & 3 \\ 4 & 5 & -2 & 5 \end{vmatrix}$

2 行列 $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ とする.

(1) $A$ の $(i,j)$ 余因子 $\Delta_{ij}$ $(1 \leq i, j \leq 3)$ を $(i,j)$ 成分とする 3 次行列 $B = (\Delta_{ij})$ を求めよ.

(2) $A$ の行列式 $|A|$ の値を求めよ.

(3) $A$ の逆行列 $A^{-1}$ を求めよ.

3 次の行列式を因数分解せよ.

(1) $\begin{vmatrix} a & a & b \\ 2a & a+b & 2b \\ 2a+b & a+2b & 3a \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$ (3) $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix}$ (4) $\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix}$

**第 12 回演習問題の解答：**

$\boxed{1}$ 次の行列式を計算せよ.

(1) $$\begin{vmatrix}12&9\\13&8\end{vmatrix} \xlongequal{②-①} \begin{vmatrix}12&9\\1&-1\end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix}4&3\\1&-1\end{vmatrix} = 3(4\times(-1)-3\times1) = -21$$

(2) $$\begin{vmatrix}0&0&10\\0&-7&11\\5&8&-12\end{vmatrix} \xlongequal{①\leftrightarrow③} -\begin{vmatrix}5&8&-12\\0&-7&11\\0&0&10\end{vmatrix} = -5\times(-7)\times10 = 350$$

(3) $$\begin{vmatrix}1&-3&7\\0&5&9\\2&-11&13\end{vmatrix} \xlongequal{③-2\times①} \begin{vmatrix}1&-3&7\\0&5&9\\0&-5&-1\end{vmatrix} \xlongequal{③+②} \begin{vmatrix}1&-3&7\\0&5&9\\0&0&8\end{vmatrix} = 1\times5\times8 = 40$$

(4) $$\begin{vmatrix}1&0&-2&-1\\1&1&-2&3\\0&2&-1&0\\-1&2&-1&2\end{vmatrix} \xlongequal[④+①]{②-①} \begin{vmatrix}1&0&-2&-1\\0&1&0&4\\0&2&-1&0\\0&2&-3&1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1&0&4\\2&-1&0\\2&-3&1\end{vmatrix} \xlongequal[③-2\times①]{②-2\times①} \begin{vmatrix}1&0&4\\0&-1&-8\\0&-3&-7\end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix}-1&-8\\-3&-7\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1&8\\3&7\end{vmatrix} = 1\times7-8\times3 = 7-24 = -17$$

(5) $$\begin{vmatrix}2&0&2&0\\-1&0&0&1\\0&2&1&0\\0&-1&0&2\end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix}1&0&1&0\\-1&0&0&1\\0&2&1&0\\0&-1&0&2\end{vmatrix} \xlongequal{②+①} 2\begin{vmatrix}1&0&1&0\\0&0&1&1\\0&2&1&0\\0&-1&0&2\end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix}0&1&1\\2&1&0\\-1&0&2\end{vmatrix}$$
$$= 2\left(-1^2\times(-1)-1\times2^2\right) = 2\times(-3) = -6$$

(6) $$\begin{vmatrix}0&1&-2&1\\-1&0&-1&0\\-2&1&0&1\\1&-1&2&0\end{vmatrix} \xlongequal{①\leftrightarrow②} -\begin{vmatrix}-1&0&-1&0\\0&1&-2&1\\-2&1&0&1\\1&-1&2&0\end{vmatrix} \xlongequal[④+①]{③-2\times①} -\begin{vmatrix}-1&0&-1&0\\0&1&-2&1\\0&1&2&1\\0&-1&1&0\end{vmatrix}$$
$$= -(-1)\begin{vmatrix}1&-2&1\\1&2&1\\-1&1&0\end{vmatrix} \xlongequal[③+①]{②-①} \begin{vmatrix}1&-2&1\\0&-4&0\\0&-1&1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}4&0\\-1&1\end{vmatrix} = 4\times1 = 4$$

(7) $$\begin{vmatrix}2&3&-3&5\\-3&0&1&0\\3&-1&-3&3\\4&5&-2&5\end{vmatrix} \xlongequal{\boxed{1}+3\times\boxed{3}} \begin{vmatrix}-7&3&-3&5\\0&0&1&0\\-6&-1&-3&3\\-2&5&-2&5\end{vmatrix} \xlongequal{\text{②で展開}} 1\times\left(-\begin{vmatrix}-7&3&5\\-6&-1&3\\-2&5&5\end{vmatrix}\right)$$
$$\xlongequal[③+5\times②]{①+3\times②} -\begin{vmatrix}-25&0&14\\-6&-1&3\\-32&0&20\end{vmatrix} \xlongequal{\boxed{2}\text{で展開}} -(-1)\begin{vmatrix}-25&14\\-32&20\end{vmatrix} \xlongequal{②-①} \begin{vmatrix}-25&14\\-7&6\end{vmatrix}$$
$$\xlongequal{\boxed{1}+\boxed{2}} \begin{vmatrix}-11&14\\-1&6\end{vmatrix} = (-11)\times6-14\times(-1) = -52$$

$\boxed{2}$ (1) $$B = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix}1&-3\\-2&3\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}0&-3\\2&3\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}0&1\\2&-2\end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix}-2&2\\-2&3\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}-1&2\\2&3\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}-1&-2\\2&-2\end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix}-2&2\\1&-3\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}-1&2\\0&-3\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}-1&-2\\0&1\end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3&-6&-2\\2&-7&-6\\4&-3&-1\end{pmatrix}$$

(2) $|A| = 11$

(3) $$A^{-1} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix}-3&2&4\\-6&-7&-3\\-2&-6&-1\end{pmatrix}$$

$\boxed{3}$ (1) $-(a-b)^2(3a+b)$ (2) $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$ (3) $(x-y)(y-z)(z-x)$
(4) $-a(a-b)(b-c)(c-d)$

[0]※この講義に関する情報はホームページを参照. http://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2023/la1.html