基礎数理C, 第5回演習問題

2023/6/8 担当：那須

$\boxed{1}$ 次の実対称行列 A を直交行列を用いて対角化せよ.[1]

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$　(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$　(3) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(4) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$　(5) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

---

[1]「直交行列を $P = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$ にとると, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$ となる」のように答えること.

[1]解答：

$\boxed{1}$ 次の解は 1 つの正解例であることに注意 (正解は 1 通りではない.)

(1) 直交行列を $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ にとると $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ となる.

(2) 直交行列を $P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ にとると $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ となる.

(3) 直交行列を $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\sqrt{\frac{2}{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ にとると $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ となる.

(4) 直交行列を $P = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{35}} & \frac{3}{\sqrt{14}} & -\frac{1}{\sqrt{10}} \\ \sqrt{\frac{5}{7}} & -\sqrt{\frac{2}{7}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{35}} & \frac{1}{\sqrt{14}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$ にとると $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ となる.

(5) 直交行列を $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 \end{pmatrix}$ にとると $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ となる.

[1]※この講義に関する情報はホームページを参照. http://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2023/bmc.html