

1 次の行列は直交行列であることを示せ.

$$(1) \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (2) \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad (3) \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2 次の行列が直交行列になるように定数 a, b の値を定めよ: (1) $\begin{pmatrix} a & -b \\ a & b \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & b \end{pmatrix}$

3 次のベクトルの定める $\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4$ または $\mathbb{R}[x]_2$ の基底をシュミットの方法を用いて正規直交化せよ.

$$(1) \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$(2) \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$(3) \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$(4) \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$(5) f_1 = x^2, f_2 = x, f_3 = 1$$

4 P, Q が直交行列ならば, 積 PQ , および逆行列 P^{-1} も直交行列であることを示せ.

⁰解答:

1 与えられた行列を A として, $A^t A$ が単位行列になることを確認する.

$$2 \quad (1) (a, b) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\pm 1, \pm 1) \text{ (複合任意)} \quad (2) (a, b) = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$$

$$3 \quad (1) \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\} \quad (2) \left\{ \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$$

$$(3) \left\{ \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\} \quad (4) \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$(5) \left\{ \sqrt{\frac{5}{2}}x^2, \sqrt{\frac{3}{2}}x, \frac{3-5x^2}{2\sqrt{2}} \right\}$$

4 教科書 p.120, 問題 6.2-5,6 参照