

1 次のベクトルの定める  $\mathbb{R}^3$  の基底  $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$  をシュミットの方法を用いて正規直交化せよ.

$$(1) \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$(2) \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$(3) \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix},$$

2 ベクトル空間  $\mathbb{R}[x]_2$  に  $\langle f(x), g(x) \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$  により内積  $\langle f(x), g(x) \rangle$  を定義する. 以下の多項式の定める  $\mathbb{R}[x]_2$  の基底  $\{f_1, f_2, f_3\}$  をこの内積に関して, シュミットの方法を用いて正規直交化せよ.

$$(1) f_1 = 1, f_2 = x, f_3 = x^2$$

$$(2) f_1 = x, f_2 = x^2, f_3 = 1$$

<sup>0</sup>解答:

$$1 \quad (1) \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\} \quad (2) \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \quad (3) \left\{ \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{70}} \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$$

$$2 \quad (1) \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}x, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}(3x^2 - 1) \right\} \quad (2) \left\{ \sqrt{\frac{3}{2}}x, \sqrt{\frac{5}{2}}x^2, \frac{1}{2\sqrt{2}}(-5x^2 + 3) \right\}$$

<sup>0</sup>※この講義に関する情報はホームページを参照. <http://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2023/bmc.html>