

1 次の2次形式を対称行列を用いて表せ.

$$(1) q(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_1x_2 - 3x_2^2.$$

$$(2) q(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_2^2 + 2x_1x_3 + x_3^2.$$

2 次の2次形式を直交変数変換で対角化せよ.

$$(1) q(x_1, x_2) = -x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2.$$

$$(2) q(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2.$$

$$(3) q(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 - x_2^2 + 2x_1x_3 - x_3^2.$$

<sup>2</sup>解答:

$$1 (1) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \text{とおくと, } q(x_1, x_2) = A[\mathbf{x}]. \quad (2) A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{とおくと, } q(x_1, x_2, x_3) = A[\mathbf{x}].$$

$$2 (1) A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{とおくと } q(x_1, x_2) = A[\mathbf{x}] \text{ と表せる. } P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{とおくと, } P \text{ は直交行列であり, } A \text{ は}$$

$${}^tPAP = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ と対角化される. 直交変数変換 } \mathbf{x} = P\mathbf{y} \text{ を考えると } q(x_1, x_2) = -2y_2^2 \text{ と対角化される.}$$

$$(2) A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{とおくと } q(x_1, x_2) = A[\mathbf{x}] \text{ と表せる. } P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{とおくと, } P \text{ は直交行列であり, } A \text{ は}$$

$${}^tPAP = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ と対角化される. 直交変数変換 } \mathbf{x} = P\mathbf{y} \text{ を考えると } q(x_1, x_2) = y_1^2 + 3y_2^2 \text{ と対角化される.}$$

$$(3) A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{とおくと } q(x_1, x_2, x_3) = A[\mathbf{x}] \text{ と表せる. } P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{とおくと, } P \text{ は直}$$

$$\text{交行列であり, } A \text{ は } {}^tPAP = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ と対角化される. 直交変数変換 } \mathbf{x} = P\mathbf{y} \text{ を考えると}$$

$$q(x_1, x_2) = -2y_1^2 - y_2^2 \text{ と対角化される.}$$