

1 次の実対称行列 A を直交行列を用いて対角化せよ.²

$$(1) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad (2) A = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} \quad (3) A = \begin{pmatrix} 7 & 12 \\ 12 & 0 \end{pmatrix} \quad (4) A = \begin{pmatrix} 15 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

2 次の実対称行列 A を直交行列を用いて対角化せよ.

$$(1) A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2) A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

² 「直交行列を $P = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$ にとると, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$ となる」のように答えること.

²解答:

1 次の実対称行列 A を直交行列を用いて対角化せよ. (正解は1通りではない.)

(1) 直交行列を $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$ にとると $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ となる.

(2) 直交行列を $P = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{13}} & -\frac{3}{\sqrt{13}} \\ \frac{3}{\sqrt{13}} & \frac{2}{\sqrt{13}} \end{pmatrix}$ にとると $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ となる.

(3) 直交行列を $P = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$ にとると $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & -9 \end{pmatrix}$ となる.

(4) 直交行列を $P = \begin{pmatrix} \frac{4}{\sqrt{17}} & -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \frac{1}{\sqrt{17}} & \frac{4}{\sqrt{17}} \end{pmatrix}$ にとると $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ となる.

2 次の実対称行列 A を直交行列を用いて対角化せよ. (正解は1通りではない.)

(1) 直交行列を $P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{2}}{3} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ にとると $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ となる.

(2) 直交行列を $P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$ にとると $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ となる.

²※この講義に関する情報はホームページを参照. <http://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2022/lac.html>