

以下では \mathbb{R}^n の内積は標準内積とし, $\mathbb{R}[x]_n$ の内積は $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$ により定義する.

1 次のベクトル空間 V と次のベクトルの組 (\mathbf{x}, \mathbf{y}) に対し, 内積 $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ を計算せよ.

$$(1) \quad V = \mathbb{R}^3, \left(\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \right) \quad (2) \quad V = \mathbb{R}^4, \left(\begin{bmatrix} 5 \\ -6 \\ 7 \\ -8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 11 \\ 12 \\ 13 \\ 14 \end{bmatrix} \right)$$

$$(3) \quad V = \mathbb{R}[x]_2, (1 + x + 2x^2, 1 - 2x + 3x^2) \quad (4) \quad V = \mathbb{R}[x]_3, (1 - x, 1 + x + x^2 + x^3)$$

2 次のベクトルのノルムを求めよ.

$$(1) \quad \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} \quad (2) \quad \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix} \quad (3) \quad f(x) = 1 - x + x^2 - x^3$$

3 次のベクトルの組が直交するような定数 a の値を求めよ.

$$(1) \quad \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a \\ a+1 \\ 3 \end{bmatrix} \right) \quad (2) \quad \left(\begin{bmatrix} a \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a \\ a \\ 2 \end{bmatrix} \right) \quad (3) \quad (1 - x, 1 + ax + x^2)$$

4 $V = \mathbb{R}^3$ または $V = \mathbb{R}[x]_2$ とする. 次のベクトルの組に直交するようなノルム 1 の V の元を求めよ.

$$(1) \quad \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \quad (2) \quad \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right) \quad (3) \quad (1 - x, 1 - x^2)$$

5 次を示せ. ただしベクトル \mathbf{x} に対し $\|\mathbf{x}\|$ は \mathbf{x} のノルムを表す.

$$(1) \quad \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = 2(\|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2)$$

$$(2) \quad \mathbf{x} \text{ と } \mathbf{y} \text{ が直交する } (\mathbf{x} \perp \mathbf{y}) \iff \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2$$

$$(3) \quad \mathbf{x} + \mathbf{y} \text{ と } \mathbf{x} - \mathbf{y} \text{ が直交する } (\mathbf{x} + \mathbf{y} \perp \mathbf{x} - \mathbf{y}) \iff \|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{y}\|$$

0解答:

$$1 \quad (1) \quad -19 \quad (2) \quad -38 \quad (3) \quad \frac{32}{5} \quad (4) \quad \frac{8}{5}$$

$$2 \quad (1) \quad \sqrt{83} \quad (2) \quad \sqrt{106} \quad (3) \quad 8\sqrt{\frac{3}{35}}$$

$$3 \quad (1) \quad a = 1 \quad (2) \quad a = 1, 2 \quad (3) \quad a = 4$$

$$4 \quad (1) \quad \pm \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, -1) \quad (2) \quad \pm \frac{1}{\sqrt{6}}(2, -1, 1) \quad (3) \quad \pm \frac{1}{2\sqrt{2}}(1 - 2x - 5x^2)$$

5 略