

第9回 行列式の性質

本日の講義の目標

目標 9

- ① 行列式の性質 (線形性, 交代性, 正規性) について理解する.
- ② 行列式の性質を用いた計算方法について理解する.

行列式の性質

行列 $A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{pmatrix}$ の行列式を $|A| = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{vmatrix}$ と表す. 行列式は次の性質をもつ.

命題 9.1

k を任意のスカラーとし, i, j を任意の整数とする.

$$(1) \quad \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i + \mathbf{a}'_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}'_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{vmatrix}$$

$$(2) \quad \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ k\mathbf{a}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{vmatrix}$$

$$(3) \quad \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_j \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_j \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{vmatrix}$$

$$(4) \quad |E| = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{e}_n \end{vmatrix} = 1 \quad \text{ただし } E \text{ は単位行列 } E = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{e}_n \end{pmatrix} \text{ とする.}$$

(1) と (2) を線形性, (3) を交代性, (4) を正規性という.

例

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4+1 & 3+2 & 5+3 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$(2) \begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 9 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 \times 1 & 3 \times 2 & 3 \times 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$(3) \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\textcircled{2} \leftrightarrow \textcircled{3}} (-1) \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$(4) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

行列式の性質 2

命題 9.2

二つの行が等しい行列 A に対し、行列式 $|A|$ の値は 0 に等しい。

証明)

$$|A| = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{b} \\ \vdots \\ \mathbf{b} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{行を交換}} (-1) \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{b} \\ \vdots \\ \mathbf{b} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{vmatrix} = -|A|.$$

したがって $2|A| = 0$, すなわち $|A| = 0$.



行列式の性質 3

行列式の基本変形

命題 9.3

行列 A のある行に他の行の定数倍を加えても行列式 $|A|$ の値は不変である。

証明)

$$|A| = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_j \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_j \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{vmatrix} + k \times 0 = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_j \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_j + k\mathbf{a}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{vmatrix} (=: |B|). \quad \square$$

この等式の左辺と右辺を比較すれば、 j 行目に i 行目の k 倍を加える基本変形を A に行い B を得たように見える:

$$|A| \xrightarrow{\textcircled{j} + k \times \textcircled{i}} |B| \quad \left(A \xrightarrow{\textcircled{j} + k \times \textcircled{i}} B \right).$$

行列式の性質 4

命題 9.4

行列の転置をとっても、行列式の値は不変である。

例 9.5

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & x \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$$

命題 9.4 より行列式の次の性質を得る。

命題 9.6

行列式の行に関する性質はすべて列でも成立する (列基本変形に関する性質など)。

行列式の性質 5

命題 9.7

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

命題 9.7 はこの後学ぶ**行列式の余因子展開** (定理 10.5) の特別な場合になっている。 $\begin{vmatrix} a & * \\ \mathbf{0} & A' \end{vmatrix} = a|A'|$ (ただし A' は A から 1 行 1 列を除いた行列) と表す。 命題 9.4 により, $\begin{vmatrix} a & \mathbf{0} \\ * & A' \end{vmatrix} = a|A'|$ も成立する。 これらの性質は行列式の計算をより小さなサイズの行列式の計算へと帰着することを可能にする。

例

例 9.8

$$\left| \begin{array}{c|cc} 3 & \pi & 1+x \\ \hline 0 & 4 & 8 \\ 0 & 5 & 9 \end{array} \right| = 3 \times \left| \begin{array}{cc} 4 & 8 \\ 5 & 9 \end{array} \right| = 3(4 \times 9 - 8 \times 5) = 3 \times (-4) = -12.$$

階段行列の行列式の値は対角成分の積に等しい.

例 9.9

$$\left| \begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{array} \right| = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}$$

行列式の計算への応用 1

以下では $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$ により, 1 列, 2 列, 3 列を表す.

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ -3 & -1 & -2 \end{vmatrix} \xrightarrow{\textcircled{3}-3\times\textcircled{1}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 5 & 7 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{命題 9.7}} 1 \times \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 4 \times 7 - 5^2 = 3.$$

(2) (列基本変形と組合せた計算例)

$$\begin{vmatrix} 95 & 96 & 97 \\ 96 & 97 & 99 \\ 97 & 98 & 99 \end{vmatrix} \xrightarrow{\textcircled{3}-\textcircled{1}} \begin{vmatrix} 95 & 96 & 97 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{\textcircled{2}-\textcircled{1}} \begin{vmatrix} 95 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$
$$\xrightarrow{\textcircled{1}\leftrightarrow\textcircled{2}} \begin{vmatrix} 1 & 95 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -1 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$$
$$= (-1) \times (-2) = 2.$$

行列式の計算への応用2

$$(3) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 0 & 8 & 0 \\ 4 & 0 & 9 & 10 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 9 & 10 \end{vmatrix} = 1 \times 5 \times \begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 9 & 10 \end{vmatrix} = 1 \times 5 \times 8 \times 10 = 400.$$

(4) (Vandermonde 型行列式)

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} & \frac{\boxed{2}-\boxed{1}}{\boxed{3}-\boxed{1}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & y-x & z-x \\ x^2 & y^2-x^2 & z^2-x^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y-x & z-x \\ y^2-x^2 & z^2-x^2 \end{vmatrix} \\ & = \begin{vmatrix} y-x & z-x \\ (y-x)(y+x) & (z-x)(z+x) \end{vmatrix} \\ & = (y-x)(z-x) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ y+x & z+x \end{vmatrix} \\ & = (y-x)(z-x)(z-y). \end{aligned}$$