

第2回 直線と平面の方程式

本日の講義の目標

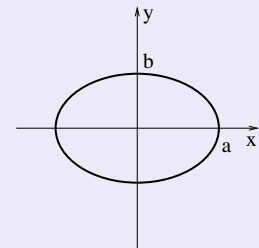
目標 2

- ① 直線の方程式について理解する.
- ② 平面の方程式について理解する.

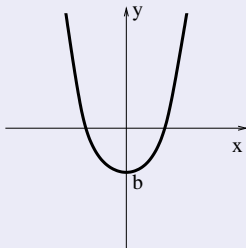
図形と方程式

中学では1次関数のグラフ(直線)を中心に方程式と図形の関係を学び、高校では2次関数のグラフや楕円、双曲線、放物線などの図形を方程式で表す方法について学んだ。本講義では平面や空間における直線と平面について学ぶ。

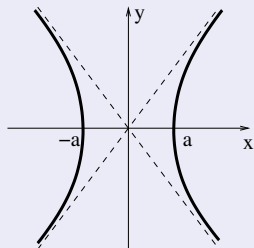
例 2.1 (図形と方程式)



(a) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ (楕円)



(b) $y - ax^2 - b = 0$ (放物線)



(c) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ (双曲線)

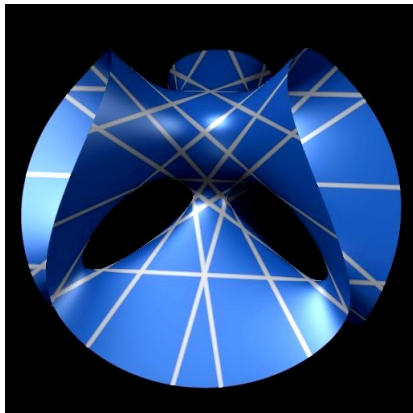
Figure: 2次曲線 (円錐曲線)

方程式が複雑になると...

In projective three-space with homogeneous coordinates $(x : y : z : w)$, Clebsch's cubic is given by the equation

$$x^3 + y^3 + z^3 + w^3 - (x + y + z + w)^3 = 0.$$

The following picture shown below was made by Stephan Endrass using his program SURF(cf. <http://surf.sourceforge.net>).



平面における直線の方程式

命題 2.2

xy -平面の直線の方程式は、一般的に

$$ax + by + c = 0, \quad (\text{ただし } a \neq 0 \text{ または } b \neq 0)$$

と表される. とくに直線の方程式は次のように式変形可能である:

- ① 傾きが m かつ点 (p, q) を通る: $y = m(x - p) + q$.
- ② 2点 (p_1, q_1) と (p_2, q_2) を通る: $(q_2 - q_1)(x - p_1) - (p_2 - p_1)(y - q_1) = 0$.

例 2.3

- ① 平面において, 点 $(1, 2)$ を通り, 傾きが 3 の直線の方程式は $y = 3(x - 1) + 2$ で与えられる. 式を整理して $y = 3x - 1$ (または $3x - y - 1 = 0$).
- ② 平面において, 2点 $(1, 2), (3, 4)$ を通る直線の方程式は,

$$y = \frac{4 - 2}{3 - 1}(x - 1) + 2$$

で与えられる. 式を整理すると, $y = x + 1$ (または $x - y + 1 = 0$).

法線ベクトルを用いた直線と平面の方程式

定義 2.4

平面や空間において直線 l や平面 H と直行する非零ベクトル \mathbf{n} を l や H の**法線ベクトル**という. 法線ベクトルは l や H に対し, 定数倍を除いて唯一通りに定まる.

命題 2.5

平面における直線 l が, 点 \mathbf{x}_0 を通り, 法線ベクトル \mathbf{n} を持つとき l の方程式は

$$(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (2.1)$$

と表される. 一方, 空間内の平面 H が, 点 \mathbf{x}_0 を通り, 法線ベクトル \mathbf{n} を持つとき H の方程式も同じ式 (2.1) で表される.

(2.1) のような方程式を (直線 l や平面 H の) **ベクトル方程式**という. 式 (2.1) は変数の個数によらず, n 次元空間内の $(n - 1)$ 次元**超平面**を定義する優れた方程式である.

空間における平面の方程式

命題 2.6

xyz -空間における平面の方程式は, 一般的に

$$ax + by + cz + d = 0, \quad (\text{ただし } (a, b, c) \neq (0, 0, 0))$$

と表される. とくに点 (p, q, r) を通り, 法線ベクトル (a, b, c) をもつ平面の方程式は

$$a(x - p) + b(y - q) + c(z - r) = 0 \quad (2.2)$$

で与えられる.

例題 2.7

空間において点 $(1, 2, 3)$ を通り, 法線ベクトル $(4, 5, 6)$ をもつ平面の方程式を求めよ.

解答) $\mathbf{x} = (x, y, z)$, $\mathbf{x}_0 = (1, 2, 3)$, $\mathbf{n} = (4, 5, 6)$ とおけば

$$(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{n} = (x - 1, y - 2, z - 3) \cdot (4, 5, 6) = 4x + 5y + 6z - 32.$$

よって求める方程式は $4x + 5y + 6z - 32 = 0$.

空間における直線の方程式

空間内の直線 l に対し, l と平行な非零ベクトルを l の**方向ベクトル**という. 方向ベクトルは l に対し, 定数倍を除き唯一通りに定まる.

命題 2.8

xyz -空間内の直線 l が, 点 (p, q, r) を通り, 方向ベクトル $\mathbf{d} = (a, b, c)$ (ただし $abc \neq 0$ とする) を持つとき l の方程式は

$$\frac{x-p}{a} = \frac{y-q}{b} = \frac{z-r}{c} \quad (2.3)$$

で与えられる.

方向ベクトル \mathbf{d} が 0 を成分に含む, 例えば $c = 0$ の場合に l の方程式は

$$\frac{x-p}{a} = \frac{y-q}{b}, \quad z-r=0 \quad (2.4)$$

で与えられる. 式 (2.3) も (2.4) も 2 枚の平面の**交わり (共通部分)** として表されることに注意する.

例題 2.9

- ① xyz -空間内において、点 $(1, -1, 0)$ を通り、方向ベクトル $\mathbf{a} = (2, 3, 4)$ をもつ直線 l の方程式を求めよ。
- ② xyz -空間内において、点 $(2, 5, 1)$ を通り、法線ベクトル $\mathbf{n} = (2, 1, -3)$ をもつ平面 H の方程式を求めよ。
- ③ l と H の交点の座標を求めよ。

解答)

- ① l の方程式は $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{4}$.
- ② $2(x-2) + (y-5) - 3(z-1) = 2x + y - 3z - 6$. したがって H の方程式は $2x + y - 3z - 6 = 0$.
- ③ l の方程式をパラメータ t を用いて表せば、

$$x = 2t + 1, \quad y = 3t - 1, \quad z = 4t.$$

H の方程式に代入し t について解くと $t = -1$. よって l と H の交点の座標は $(-1, -4, -4)$.

例題 2.10

xyz -空間内の3点 $A(-1, 1, 1)$, $B(1, -1, 1)$, $C(1, 1, -1)$ を通る平面 H の方程式を求めよ.

解答) $\overrightarrow{AB} = (1, -1, 1) - (-1, 1, 1) = (2, -2, 0)$.

$\overrightarrow{AC} = (1, 1, -1) - (-1, 1, 1) = (2, 0, -2)$. したがって H の法線ベクトルは

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (2, -2, 0) \times (2, 0, -2) = (4, 4, 4) = 4(1, 1, 1).$$

H は点 $A(-1, 1, 1)$ を通るので, H の方程式は

$$1(x + 1) + 1(y - 1) + 1(z - 1) = 0.$$

式を整理して $x + y + z - 1 = 0$ となる.