第 9 回 ベクトル空間の基底

本日の講義の目標

目標 9

1. ベクトルの一次独立性について判定する.
2. ベクトル空間の基底について理解する.

ベクトルの一次独立性の定義(再掲)

V をベクトル空間とし, $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ を V の元とする.

定義 9.1

$\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ が**一次独立である**とは, $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ の任意の一次関係式

$$c_1\mathbf{a}_1 + \cdots + c_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0} \tag{9.1}$$

が自明である, すなわち $(c_1, \ldots, c_n) = (0, \ldots, 0)$ であることを言う. $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ が一次独立でない, すなわち (9.1) に自明でない解

$$(c_1, \ldots, c_n) \neq (0, \ldots, 0)$$

が存在するとき, $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ は**一次従属である**という.

一次独立性の判定 3

定理 9.2

m, n を自然数とし, ベクトル空間 V を $V = \mathbb{R}^m$ または $V = \mathbb{C}^m$ とする. V の元 $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ が一次独立であるための必要十分条件は,

$$\mathrm{rank}\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix} = n$$

が成り立つことである. ただし $\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix}$ は $\mathbf{a}_1$ から $\mathbf{a}_n$ を列ベクトルにもつ $m \times n$ 行列を表す.

証明) $k = \mathbb{R}$ または $k = \mathbb{C}$ とし, $\mathbf{a}_1$ から $\mathbf{a}_n$ の一次関係式 $c_1\mathbf{a}_1 + \cdots + c_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0}$, $c_i \in k$ を考える. この関係式は連立方程式

$$c_1\mathbf{a}_1 + \cdots + c_n\mathbf{a}_n = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

に等しい. この方程式がただ一つの解 $c_1 = \cdots = c_n = 0$ をもつための必要十分条件は $\mathrm{rank}\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix} = n$ と表せる. $\square$

一次独立性の判定 4

例題 9.3

ベクトル $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ が一次独立であることを示せ.

解答) $A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ とおく. このとき,

$$A \xrightarrow[③+①]{②-2\times①} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

より, $\operatorname{rank} A = 3$ とわかる. したがって c_1, c_2, c_3 に関する連立方程式 $c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + c_3\mathbf{a}_3 = 0$ の解は $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ となる. つまり $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ のすべての一次関係式は自明である. □

生成系

$k=\mathbb{R}$ または $k=\mathbb{C}$ とする. $V=k^m$ とし, $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n$ を V の元とする.

定義 9.4

V のすべての元 $\mathbf{x}$ が, $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n$ の一次結合として

$$\mathbf{x}=c_1\mathbf{a}_1+\cdots+c_n\mathbf{a}_n \qquad (c_1,\ldots,c_n\in k)$$

と表せるとき, $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n$ は V を k 上**生成する** (または $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n$ は V の k 上の**生成系**である) という.

例 9.5

$\mathbf{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \mathbf{e}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \mathbf{e}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ は $\mathbb{R}^3$ の生成系である. 実際 $\mathbb{R}^3$ の任意の元 $\mathbf{x}$ は,

$$\mathbf{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=x\mathbf{e}_1+y\mathbf{e}_2+z\mathbf{e}_3,$$

と表せる.

基底

定義 9.6

$V = \mathbb{R}^n$ または $V = \mathbb{C}^n$ とする ($k = \mathbb{R}$ または $k = \mathbb{C}$ とする). V の元 $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ が V の**基底** *(basis)* であるとは,

1. $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ は k 上一次独立であり, かつ
2. $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ が k 上 V を生成する

ことをいう.

注意 9.7

- $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ が $V = \mathbb{R}^n$ または $V = \mathbb{C}^n$ の基底であるとき, 任意の元 $\mathbf{x} \in V$ は $\mathbf{a}_1$ から $\mathbf{a}_n$ の一次結合として,

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{a}_1 + \cdots + c_n\mathbf{a}_n$$

  のように, ただ一通りに表される.
- ベクトル空間 V に対し, V の基底は一通りには定まらない. (基底は無数に存在する.)

例

例 9.8

1. $V=\mathbb{R}^n$ または $V=\mathbb{C}^n$ のとき,
$$\mathbf{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\mathbf{e}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},\cdots,\mathbf{e}_n=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$$
は V の基底となる (V の**標準基底**と呼ばれる).
2. $V=\mathbb{R}^3$ において, $\mathbf{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ と $\mathbf{e}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ は一次独立であるが V を生成しないため, V の基底でない. (例えば $\mathbf{e}_3$ は $\mathbf{e}_1$ と $\mathbf{e}_2$ の一次結合で表せない.)
3. $V=\mathbb{R}^2$ において $\mathbf{a}_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\mathbf{a}_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\mathbf{a}_3=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ は V を生成するが, 一次従属であるため V の基底でない. 実は $\mathbb{R}^m$ において任意の $m+1$ 本以上のベクトル $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n$ $(n>m)$ は一次従属であることがわかる.

一次独立性と幾何

(空間) ベクトルの一次独立性について, 下の図のようなな幾何学的なイメージとともに理解しておくことは重要である.

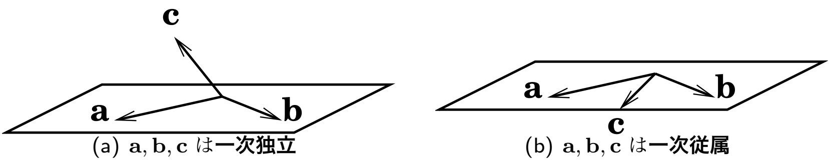

Figure: 空間ベクトルの一次独立性

問題 9.9

同様に平面ベクトルの場合に, ベクトルの位置関係の図を描くことにより, 一次独立性に関する理解を試みよ.