第 3 回 行列とその演算

本日の講義の目標

目標 3

1. 行列の定義について理解し, “行” や “列” などの用語を覚える.
2. 行列の演算 (和, スカラー倍, 積) について理解する.

行列の定義

定義 3.1

m, n を自然数とする．mn 個の数 (スカラー) a_{ij} $(1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n)$ を以下のようにならべ () または [] でくくったものを m 行 n 列の**行列** (または $m \times n$ **行列**) という:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{または} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

この a_{ij} を A の (i, j) **成分**という．行列の横のならび $\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix}$ を A の**行**といい，上から i 番目の行を**第** i **行**という．また縦のならび $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$ を A の**列**といい，左から j 番目の列を**第** j **列**という．A に対し，(m, n) を A の**型** ***(*または サイズ*)*** という．

行列の例と特別な行列

例 3.2

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ は 2×3 行列 (2 行 3 列の行列) である. A の第 2 行は $\begin{pmatrix} 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ であり, 第 3 列は $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ であり, A の $(2,1)$ 成分は 4, $(1,3)$ 成分は 3 である.

行列を表すとき, 通常 $A, B, C, \ldots$ などのアルファベットの大文字を用いる. 文字は自由に選んで良いが, O と E は特別な行列に割り当てられる (cf. 定義 3.3).

定義 3.3

全ての成分が 0 に等しい行列 O を**零行列**という. $m = n$ を満たす行列 A を (n 次) **正方行列**という. 正方行列のうち, **対角成分**が 1 で残りの成分が 0 の行列 E を**単位行列**という.

$$O = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

行列の演算

a_{ij} を (i,j) 成分とする $m \times n$ 行列 A を $A = (a_{ij})$ と表す. 例えば n 次正方行列 (a_{ij}) を $a_{ij} = 1$ $(i = j)$ かつ $a_{ij} = 0$ $(i \neq j)$ により定めれば, (a_{ij}) は単位行列 E (定義 3.3) に等しい.

定義 3.4 (行列の和とスカラー倍)

サイズ $(= m \times n)$ の等しい行列 $A = (a_{ij})$ と $B = (b_{ij})$ に対し, 和 $A + B$ を

$$A + B =: \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij} + b_{ij})$$

により定義し, スカラー λ に対し λA を

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix} = (\lambda a_{ij})$$

により定義する.

例 3.5

$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ かつ $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ のとき,

$$2A + 3B = 2\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

行列 A と行列 B の積は, A の列数と B の行数が等しいときにのみ定義される.

定義 3.6 (行列の積)

$m \times n$ 行列 $A = (a_{ij})$ と $n \times l$ 行列 $B = (b_{jk})$ に対し, $m \times l$ 行列 $AB = (c_{ij})$ を

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

により定義する.

$$AB = \begin{pmatrix} & \vdots & \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ & \vdots & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & b_{1j} & \\ \ldots & \vdots & \ldots \\ & b_{nj} & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & c_{ij} & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix}$$

AB の (i,j) 成分 c_{ij} は A の第 i 行 $\mathbf{a}_i$ と B の第 j 列の $\mathbf{b}_j$ の内積 $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{b}_j$ に等しい.

例 3.7

$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ のとき,

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \times 0 + (-2) \times 1 & 1 \times 1 + (-2) \times (-1) & 1 \times 0 + (-2) \times 0 \\ 0 \times 0 + 1 \times 1 & 0 \times 1 + 1 \times (-1) & 0 \times 0 + 1 \times 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

B の列の数 $(= 3)$ と A の行の数 $(= 2)$ が異なるため, 積 BA は**定義されない**.

行列の演算も数の演算とよく似た性質をもつが, いくつかの “著しく” 異なる性質があるので注意する:

- 和, 差, 積が定義されるとは限らない (A, B の型に依存する). (cf. 例 3.7)
- 積 AB と BA がともに定義されたとしても, 一般には $AB \neq BA$ である.

例題 3.8

$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ のとき, 積 AB と積 BA を計算せよ.

解答)

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & -10 \\ 16 & 26 \end{pmatrix}.$$

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 4 \\ 26 & 4 \end{pmatrix}.$$

行列の演算の性質

結合律や分配律などの "数" の持つ演算の性質は行列でも成立する.

- $A + B = B + A$, $A + O = A$
- $(A + B) + C = A + (B + C)$ (和に関する結合律)
- $AE = EA = A$, $AO = O$, $OA = O$
- $(AB)C = A(BC)$ (積に関する結合律)
- $0A = O$, $1A = A$, $(ab)A = a(bA)$, $(aA)B = a(AB)$
- $a(A + B) = aA + aB$, $(a + b)A = aA + bA$,
- $A(B + C) = AB + AC$, $(A + B)C = AC + BC$ (分配律)