第 19 回 対角化の応用

本日の講義の目標

目標 19

1. (行列の対角化の応用として) 漸化式と数列の一般項について理解する.

数列の漸化式

行列の対角化の応用として次の問題を考える.

問題 19.1

数列 $\{a_n\}$ が漸化式

$$a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n,$$

と初項に関する条件

$$a_0 = a_1 = 1$$

を満たすとする. このとき $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

問題へのアプローチ

行列 A とベクトル $\mathbf{a}_n$ を

$$\mathbf{a}_n = \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

と定める. このとき漸化式から

$$\mathbf{a}_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a_n - 6a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = A\mathbf{a}_n$$

が成り立つ. 帰納的に繰り返すことにより,

$$\mathbf{a}_{n+1} = A\mathbf{a}_n = A^2\mathbf{a}_{n-1} = \cdots = A^n\mathbf{a}_1$$

となる. $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ より, $\{a_n\}$ の一般項の問題は A^n の計算に帰着する.

問題 19.2

A^n を求め数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

解答) A の固有多項式は,

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -6 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(-\lambda) - 1\cdot(-6) = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda-2)(\lambda-3).$$

よって, A の固有値は $\lambda = 2, 3$ である.

$$A - 2E = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad A - 3E = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

より, $P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ とおけば, A の対角化 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ を得る.

A^n の計算 (つづき)

$$\begin{aligned}
A^n &= P\begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} P^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 3^{n+1} \\ 2^n & 3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -2^{n+1}+3^{n+1} & 3\cdot 2^{n+1}-2\cdot 3^{n+1} \\ -2^n+3^n & 3\cdot 2^n-2\cdot 3^n \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_{n+1} &= A^n\mathbf{a}_1 \\
&= \begin{pmatrix} -2^{n+1}+3^{n+1} & 3\cdot 2^{n+1}-2\cdot 3^{n+1} \\ -2^n+3^n & 3\cdot 2^n-2\cdot 3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2^{n+2}-3^{n+1} \\ 2^{n+1}-3^n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

よって一般項は $a_n = 2^{n+1}-3^n$ である.

問題

問題 19.3

数列 $\{a_n\}$ が漸化式

$$a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n,$$

と初項に関する条件

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1$$

を満たすとする．このとき $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．