第 18 回 行列の対角化可能性

本日の講義の目標

目標 18

1. 行列の対角化可能性について理解する.

行列の対角化 (復習)

行列の対角化は次の手順によって行われる.

対角化の手順

1. A の固有方程式 $|A-\lambda E|=0$ を解き, A の固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ を求める.
2. A の各固有値 λ に対し, 連立方程式
$$(A-\lambda E)\mathbf{x}=\mathbf{0}$$
を解き, 固有ベクトル $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots$ を求める.
3. もし $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots\}$ が $\mathbb{C}^n$ の基底をなせば, 次のステップへいく. もし基底をなさないならば「A は対角化不可能」となる.
4. $P=\begin{pmatrix}\mathbf{x}_1 & \ldots & \mathbf{x}_n\end{pmatrix}$ とおけば, $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \lambda_n\end{pmatrix}$.

行列の対角化 (固有値が重解の場合)

例題 18.1

行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ を対角化せよ.

解答)　A の固有多項式を計算すれば,

$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ 0 & 3-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2(3-\lambda)$. したがって A の固有値は $\lambda = 2$(重解) と $\lambda = 3$ となる.

- $\lambda = 2$ のとき, $A - 2E = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. 連立方程式 $(A - 2E)\mathbf{x} = 0$ を解けば, A の固有ベクトルは

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_2 \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (t_1, t_2) \neq (0, 0).$$

行列の対角化 (固有値が重解の場合)(つづき)

- $\lambda=3$ のとき, $A-3E=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

  $(A-3E)\mathbf{x}=0$ を解けば, A の固有ベクトルは $\mathbf{x}=t\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 0\end{pmatrix}$ $(t\neq 0)$.

したがって,

$$\mathbf{x}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\mathbf{x}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\mathbf{x}_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

とおいて, $P=\begin{pmatrix}\mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$ とおけば, A は

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$$

と対角化される.

対角化不可能な例

例題 18.1 のように, 固有方程式が重解をもったとしても, 行列の対角化が可能な場合がある. 一方で次のように対角化が不可能な行列も存在する.

例 18.2

$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ とする. A の固有値は

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 3)^2$$

より, $\lambda = 3$ のみである. 一方,

$$A - 3E = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

よって, $\lambda = 3$ に対する A の固有ベクトルは, $\mathbf{x} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $(t \neq 0)$. A の固有ベクトルによる $\mathbb{C}^2$ の基底が存在しないため, A は対角化不可能である.

対角化可能であるための条件

A を複素数を成分とする n 次 (正方) 行列とする. A の固有多項式を

$$\Phi_A(\lambda) = (-1)^n(\lambda - a_1)^{m_1} \cdots (\lambda - a_k)^{m_k},$$

ただし $a_i \neq a_j$ $(i \neq j)$ とする. (複素数の範囲では 1 次式の積に分解する.)

定理 18.3

A が対角化可能であるためには各 $i = 1, \ldots, k$ に対し

$$n - \mathrm{rank}(A - a_i E) = m_i$$

が成り立つことが必要かつ十分である.

上の条件は, 各 i に対し (固有ベクトルを求めるための) 連立方程式

$$(A - a_i E)\mathbf{x} = 0$$

に, m_i 個の互いに一次独立な解 $\mathbf{x} = \mathbf{x}_j$ $(j = 1, \ldots, m_i)$ が存在することと同値である.

対角化可能性の判定 1

例題 18.4

次の行列 A が対角化可能かどうかについて判定せよ．

(1) $A = \begin{pmatrix} -1 & 9 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ (2) $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ (3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

解答) (1) $|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 9 \\ -1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)(5-\lambda) - (-9) = (\lambda - 2)^2.$

固有多項式が重根 $\lambda = 2$ (重複度 2) を持つ．$A - 2E = \begin{pmatrix} -3 & 9 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ より，

$$2 - \mathrm{rank}(A - 2E) = 2 - 1 = 1.$$

固有値 2 に対し，一次独立な固有ベクトルが 1 本 (< 2) しか存在しないので，対角化不可能である．

(2) $|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 \\ -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(5-\lambda) - (-2)^2 = (\lambda - 1)(\lambda - 6).$

A は相異なる 2 つの固有値を持つ (固有多項式が重根を持たない) ので，対角化可能である．

対角化可能性の判定 2

(3)　A の固有多項式を計算すると,

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-1)^2(\lambda-2),$$

より, 重根 $\lambda = 1$ (重複度 2) を持つ.

$$A - E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より,

$$3 - \mathrm{rank}(A - E) = 3 - 2 = 1.$$

固有値 1 に対し, 一次独立な固有ベクトルが 1 本 (< 2) しか存在しないので, A は対角化不可能である.