第 16 回 行列の対角化とべき乗

本日の講義の目標

目標 16

1. 行列の対角化について理解する.
2. 行列のべき乗の計算について理解する.

行列の対角化 1

A を n 次 (正方) 行列とし, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ を A の (相異なる) 固有値, $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ をそれぞれに対応する A の固有ベクトルとする. このとき

$$A\mathbf{x}_i = \lambda_i \mathbf{x}_i \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{16.1}$$

が成り立つ. ここで $\mathbf{x}_i$ を第 i 列にもつような行列

$$P = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 & \ldots & \mathbf{x}_n \end{pmatrix}$$

を考える. (16.1) より,

$$\begin{aligned} AP &= A \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 & \ldots & \mathbf{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\mathbf{x}_1 & \ldots & A\mathbf{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1\mathbf{x}_1 & \ldots & \lambda_n\mathbf{x}_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 & \ldots & \mathbf{x}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \lambda_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \lambda_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

したがって,...

行列の対角化 2

$$AP = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \text{\huge 0} \\ & \ddots & \\ \text{\huge 0} & & \lambda_n \end{pmatrix} \tag{16.2}$$

もし P が正則 (逆行列 P^{-1} をもつ) ならば, 両辺に左から P^{-1} をかけると

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \text{\huge 0} \\ & \ddots & \\ \text{\huge 0} & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

となる.

定義 16.1

正方行列 A に対し, $P^{-1}AP$ が対角行列になるような正則行列 P を与えることを A を**対角化する**といい, そのような行列 P が存在するとき, A は**対角化可能である**という.

以上より (A の固有ベクトルを並べた) 行列 P が正則ならば, A は対角化可能であり, 対角化の対角成分には A の固有値が現れる.

行列の対角化 3

例題 16.2

行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ を対角化せよ.

解答)　(Step 1) まず A の固有値を求める.

$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4 = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda - 3)(\lambda + 1)$. したがって A の固有値は $\lambda = 3, -1$.

(Step 2) 次に A の固有ベクトルを求める.

- $\lambda = 3$ のとき, $A - 3E = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. $(A - 3E)\mathbf{x} = 0$ を解いて, 固有ベクトルは $\mathbf{x} = t_1\mathbf{x}_1$ $(t_1 \neq 0)$, ただし $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- $\lambda = -1$ のとき, $A + E = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. $(A + E)\mathbf{x} = 0$ を解いて, 固有ベクトルは $\mathbf{x} = t_2\mathbf{x}_2$ $(t_2 \neq 0)$, ただし $\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

行列の対角化 4

例題 16.2 の解答のつづき)　(Step 3) 最後に対角化をする．

$$P = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

とおけば，$|P| = 1 \times 1 - (-1) \times 1 = 2 \neq 0$ より P は正則である．したがって P^{-1} が存在し，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

となる．

注意 16.3

行列 A に対し A の対角化の仕方 (P の選び方) は一通りではない．

1. $\mathbf{x}_1$ と $\mathbf{x}_2$ の順序を変えたものや，
2. $\mathbf{x}_1$ または $\mathbf{x}_2$ の一方または両方を零でないスカラー倍で置き換えたもの

も A の対角化を与える．例えば，

- $P = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ のとき $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ (対角成分の順序も逆になる)．
- $P = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 & -\mathbf{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ のとき $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ となる．

行列のべき乗 1

行列の対角化のもっとも有名な応用は行列の冪 (べき) 乗の計算である.
正方行列 A に対し, A^n を以下のように帰納的に定義する:

$$A^1 = A, A^2 = A \cdot A, A^3 = A \cdot A^2, \ldots, A^n = A \cdot A^{n-1}, \ldots.$$

行列の積に関する結合律により, A^n はどの順番に積をとっても結果は変わらない.

例 16.4

$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ のとき, $A^2 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix}$. 同様に

$$A^n = A \cdot A^{n-1} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^{n-1} & 0 \\ 0 & b^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{pmatrix}.$$

行列のべき乗 2

n 次行列 A が $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \text{\huge 0} \\ & \ddots & \\ \text{\huge 0} & & \lambda_n \end{pmatrix}$ のように対角化されるとき,

命題 16.5

$$A^k = P \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & \text{\huge 0} \\ & \ddots & \\ \text{\huge 0} & & \lambda_n^k \end{pmatrix} P^{-1} \qquad (k = 1, 2, \dots)$$

証明)

$$\begin{aligned} A^k &= PP^{-1}A^kPP^{-1} \\ &= P\underbrace{(P^{-1}AP)(P^{-1}AP)\cdots(P^{-1}AP)}_{k\text{ 回}}P^{-1} \\ &= P\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \text{\huge 0} \\ & \ddots & \\ \text{\huge 0} & & \lambda_n \end{pmatrix}^k P^{-1} = P\begin{pmatrix} \lambda_1^k & & \text{\huge 0} \\ & \ddots & \\ \text{\huge 0} & & \lambda_n^k \end{pmatrix} P^{-1} \quad \square \end{aligned}$$

行列のべき乗3

例題 16.6

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ のとき A^n $(n = 1, 2, \dots)$ を求めよ.

解答)　まず A を対角化する. $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ のとき, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ となる (cf. 例題 16.2). このとき命題 16.5 より, $A^n = P \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} P^{-1}$. ここで 2 次の逆行列の公式 (定理 7.11) を用いれば $P^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. したがって

$$
\begin{aligned}
A^n &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \left(\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right) \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3^n & -(-1)^n \\ 3^n & (-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3^n + (-1)^n & 3^n - (-1)^n \\ 3^n - (-1)^n & 3^n + (-1)^n \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

注意 16.7

1. 行列 A に対し, A の対角化の仕方はいろいろあるが, **どのような対角化をとっても** A^n の計算結果は等しくなる.
2. 実は対角化できない行列もある ($\to$ **ジョルダン標準形**).
3. **一般次数の** (正方) 行列の**対角化可能性**と**対角化の方法**については, このあとに学ぶが, 計算方法は 2 次の場合と基本的に同じである.