第 10 回 行列式の定義

本日の講義の目標

目標 10

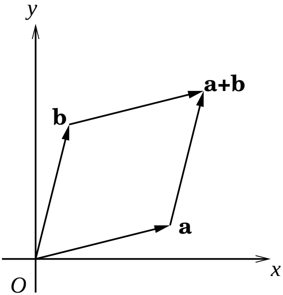
1. 行列式の定義について理解する.
2. 2 次と 3 次の行列式について理解する.

2 次行列式

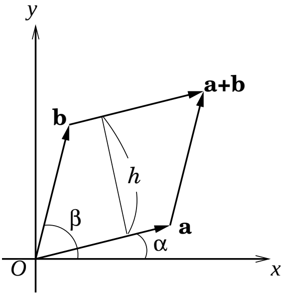
定義 10.1

2 次行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対し，その行列式 $|A|$ (または $\det A$) を $|A| = ad - bc$ により定義する．

行列式の幾何学的な意味について説明する．2 次行列 A を $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$ で定義し，A の 1 行目と 2 行目の行ベクトルをそれぞれ $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$ とする．A の行列式 $|A|$ の値は $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ で張られる平行四辺形の (符号付き) 面積に等しい．



証明



平行四辺形の面積を S とすれば $S = |\mathbf{a}| \times h$ が成り立つ．一方 $h = |\mathbf{b}|\sin(\beta - \alpha)$ が成り立ち，したがって加法定理より，

$$\begin{aligned} S &= |\mathbf{a}| \times |\mathbf{b}|\sin(\beta - \alpha) \\ &= |\mathbf{a}||\mathbf{b}|(\sin\beta\cos\alpha - \cos\beta\sin\alpha) \\ &= (|\mathbf{a}|\cos\alpha)(|\mathbf{b}|\sin\beta) - (|\mathbf{a}|\sin\alpha)(|\mathbf{b}|\cos\beta) \\ &= a_1 b_2 - a_2 b_1 \\ &= |A| \quad \square \end{aligned}$$

行列式の性質

記法 10.2

平面ベクトル $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ に対し, 1 行目が $\mathbf{a}$ に等しく, 2 行目が $\mathbf{b}$ に等しい行列を $\begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}$ と表し, その行列式を $\begin{vmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{vmatrix}$ と表す.

行列式は以下の性質をもつ.

命題 10.3

$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ を平面ベクトルとし, k をスカラーとする.

(1) $\begin{vmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b}+\mathbf{c} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{c} \end{vmatrix}$　(2) $\begin{vmatrix} k\mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{a} \\ k\mathbf{b} \end{vmatrix}$　(3) $\begin{vmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{a} \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{vmatrix}$

(4) $\begin{vmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b}+k\mathbf{a} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}+k\mathbf{b} \\ \mathbf{b} \end{vmatrix}$　(5) $\begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \end{vmatrix} = 1$ (ただし $\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$)

いずれの性質も平行四辺形の面積の言葉で幾何学的に解釈することが可能である. 性質 (1) と (2) を行列式の**線形性**, (3) を**交代性**, (5) を**正規性**と呼ぶ.

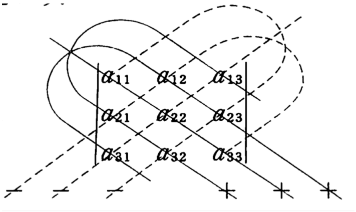
3 次行列式

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$ を 3 次行列とする. A の行列式 $|A|$ を次で定義する.

定義 10.4

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{c} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{array}.$$

サラスの方法



3 次行列式と平行六面体

A の 3 つの行ベクトルを $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ とし，(2 次行列式のときと同様に) 行列

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \end{pmatrix}$$

の行列式 $|A|$ を

$$|A| = \begin{vmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \end{vmatrix}$$

と表せば, 3 次行列式 $|A|$ の値は $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ を隣り合う 3 つの辺とする**平行六面体**の体積 V に等しい.

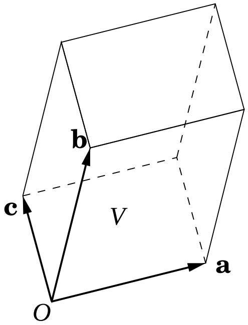


Figure: 平行六面体

行列式の計算

例題 10.5

次の行列式を計算せよ．

(1) $\begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 9 & 11 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$

解答) サラスの方法により計算する．

(1) $\begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 9 & 11 \end{vmatrix} = 4 \times 11 - 8 \times 9 = -28.$

(2)

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} &= 1 \times 5 \times 9 + 2 \times 6 \times 7 + 4 \times 8 \times 3 \\ &\quad - 3 \times 5 \times 7 - 2 \times 4 \times 9 - 1 \times 8 \times 6 \\ &= 0. \end{aligned}$$

行列 A を n 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ とする．$1 \leq k \leq n$ に対し，A の第 k 行から 1 つ成分 a_{ki_k} を選ぶ．このとき同じ列の成分を 2 つ以上とらないようにし，それらの積

$$a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n}$$

を考える．このとき添字の組

$$\pi = (i_1, \ldots, i_n)$$

は 1 から n までの整数を並び替えた数列となる．このような $(1, 2, \ldots, n)$ の並び替えとして得られる数列を (長さ n の) **順列**という．

定義 10.6

長さ n の順列 $\pi = (i_1, \dots, i_n)$ の中から 2 つの数 i_k と i_l $(k \neq l)$ をとり,

$$i_k > i_l \quad \text{かつ} \quad k < l$$

となる組 (k, l) を**転倒**と呼ぶ. 転倒の個数が偶数である順列を**偶順列**, 奇数である順列を**奇順列**という.

例 10.7 (長さ 3 の順列とその転倒数)

順列	転倒の個数	偶奇
$(1\ 2\ 3)$	0	偶
$(2\ 3\ 1)$	2	偶
$(3\ 1\ 2)$	2	偶
$(3\ 2\ 1)$	3	奇
$(2\ 1\ 3)$	1	奇
$(1\ 3\ 2)$	1	奇

行列式の定義

順列の符号 2

次の順列の符号が行列式の定義に用いられる.

定義 10.8

順列 $\pi = (i_1, \dots, i_n)$ に対し, 符号 $\mathrm{sgn}(\pi)$ を

$$\mathrm{sgn}(\pi) := \begin{cases} 1 & (\pi \text{ は偶順列}) \\ -1 & (\pi \text{ は奇順列}) \end{cases}$$

と定める.

長さ n の順列は全部で $n!$ 個存在するが, これらの順列に関し

$$\mathrm{sgn}(i_1, \dots, i_n) a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n}$$

の和を取ったものを A の**行列式**といい, 記号 $|A|$ (または $\det A$) により表す.

定義 10.9 (行列式)

$$|A| = \sum_{(i_1, \dots, i_n)} \mathrm{sgn}(i_1, \dots, i_n) a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n}$$

例

- $(n=2)$ $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ のとき,

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \mathrm{sgn}(1\ 2)a_{11}a_{22} + \mathrm{sgn}(2\ 1)a_{12}a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

- $(n=3)$ $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ のとき, $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ は,

$$\begin{aligned} |A| &= \mathrm{sgn}(1\ 2\ 3)a_{11}a_{22}a_{33} + \mathrm{sgn}(2\ 3\ 1)a_{12}a_{23}a_{31} + \mathrm{sgn}(3\ 1\ 2)a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\qquad + \mathrm{sgn}(2\ 1\ 3)a_{12}a_{21}a_{33} + \mathrm{sgn}(1\ 3\ 2)a_{11}a_{23}a_{32} + \mathrm{sgn}(3\ 2\ 1)a_{13}a_{22}a_{31} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\qquad - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}. \qquad \text{(サラスの公式)} \end{aligned}$$