

1 次のベクトルの組が, 括弧内のベクトル空間の基底になるかどうかについて答えよ.

$$(1) \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix} \quad (\text{ベクトル空間は } \mathbb{R}^2)$$

$$(2) \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (\text{ベクトル空間は } \mathbb{R}^3)$$

2  $\mathbb{R}^3$  の基底  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$  に対し, 線形関係式  $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  が成り立つとき, 係数  $c_1, c_2, c_3$  の値を求めよ.

<sup>0</sup>略解:

$$1 (1) A = (\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2) = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textcircled{2} + \frac{2}{3} \times \textcircled{1}} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{rank } A = 1 < 2 \text{ より, } \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\} \text{ は } \mathbb{R}^2 \text{ の基底にならない.}$$

$$(2) B = (\mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2 \ \mathbf{b}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textcircled{2} - 2 \times \textcircled{1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textcircled{3} + \textcircled{2}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

rank  $B = 3$  より,  $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$  は  $\mathbb{R}^3$  の基底になる.

2  $c_1, c_2, c_3$  の満たす連立方程式を解くと,

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{\textcircled{2} + \textcircled{1}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \end{array} \right) \xrightarrow{\textcircled{3} - \textcircled{2}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} \textcircled{1} - \textcircled{3} \\ \textcircled{2} - \textcircled{3} \end{array}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right). \quad \text{よって,}$$

$$c_1 = -2, c_2 = -1, c_3 = 4.$$