

1 複素数全体の集合  $\mathbb{C} = \{a + b\sqrt{-1} \mid a, b \in \mathbb{R}\}$  が,  $\mathbb{R}$  上のベクトル空間になることを示せ.

2 次のベクトルの組が 1 次独立かどうか判定せよ.

$$(1) \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$(2) \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$(3) \mathbf{c}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}, \mathbf{c}_2 = \begin{pmatrix} -9 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{c}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix}, \mathbf{c}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 9 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$$(4) \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(5) \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

0 解答:

1 省略

2 (1)  $A := (\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \mathbf{a}_3)$  とおくと,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textcircled{3}-\textcircled{1}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textcircled{3} \times 2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textcircled{3}-\textcircled{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

従って,  $\text{rank } A = 3$ . 連立方程式  $A\mathbf{x} = 0$  は自明な解  $\mathbf{x} = 0$  しか持たないので,  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$  は一次独立である.

(2)  $B := (\mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2 \ \mathbf{b}_3)$  とおくと,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textcircled{2}-3 \times \textcircled{1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textcircled{2} \times 1/3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textcircled{3}+\textcircled{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

従って,  $\text{rank } B = 2 < 3$ . 連立方程式  $B\mathbf{x} = 0$  は非自明な解  $\mathbf{x} \neq 0$  を持つので,  $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$  は一次従属である.

(3)  $C := (\mathbf{c}_1 \ \mathbf{c}_2 \ \mathbf{c}_3 \ \mathbf{c}_4) = \begin{pmatrix} 2 & -9 & -2 & -1 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 7 & -1 & -5 & -7 \end{pmatrix}$  とおけば, 明らかに  $\text{rank } C \leq 3 < 4$ . 従って, 連立方程式  $C\mathbf{x} = 0$

は非自明な解  $\mathbf{x} \neq 0$  を持つので,  $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3, \mathbf{c}_4$  は一次従属である.

(4) 一次独立

(5) 一次従属