線形代数 (SC), 第 18 回演習問題

2022/1/6 担当：那須

$\boxed{1}$ 次の行列 A を対角化せよ.

(1) $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$　(2) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$　(3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

$\boxed{2}$ n を整数とする. 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ のべき乗 A^n を計算せよ.

$\boxed{3}$ (1) n 次正方行列 A の固有多項式が

$$|A - \lambda E| = (-1)^n (\lambda - a_1)^{m_1} \dots (\lambda - a_k)^{m_k}, \qquad (\text{ただし } i \neq j \text{ のとき } a_i \neq a_j)$$

のように 1 次式の積に分解するとき, A が対角化可能であるための必要十分条件を書け.

(2) 次の行列の中で対角化が<u>可能でないもの</u>を<u>全て</u>選び, 空欄の中に番号を記入せよ. なお, 解答は答え (番号) のみで良い.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, (2) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, (3) $\begin{pmatrix} 7 & -9 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$, (4) $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, (5) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,

(6) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, (7) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, (8) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

答

---

[0]解答：

$\boxed{1}$ (1) $P = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ とおけば, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$　(2) $P = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ とおけば, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$　(3) $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ とおけば, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\boxed{2}$ $A^n = \dfrac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 + (-2)^n & 2 + (-2)^{n+1} \\ 1 - (-2)^n & 1 - (-2)^{n+1} \end{pmatrix}$

$\boxed{3}$ (1) 各 $i = 1, \dots, k$ について $n - \mathrm{rank}(A - a_i E) = m_i$ が成り立つ.　(2) (1), (3), (6), (8)

[0]※この講義に関する情報はホームページを参照. http://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2021/lasc.html