線形代数 (SC), 第 17 回演習問題

2021/12/20 担当：那須

$\boxed{1}$ 次の行列 A に対し, 固有値 λ と固有ベクトル $\mathbf{x}$ を求めよ.

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ (2) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ (3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ (4) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\boxed{2}$ 行列 A を $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする.

(1) 行列 A を対角化せよ.

(2) A のべき乗 A^n を計算せよ.

---

[0]解答：

$\boxed{1}$ (1) $\lambda = 5, 1, 0$. $\lambda = 5$ のとき $\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 11 \end{pmatrix}$, $c_1 \neq 0$. $\lambda = 1$ のとき $\mathbf{x} = c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c_2 \neq 0$. $\lambda = 0$ のとき $\mathbf{x} = c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c_3 \neq 0$. (2) $\lambda = 0, 1, 2$. $\lambda = 0$ のとき, $\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c_1 \neq 0$. $\lambda = 1$ のとき, $\mathbf{x} = c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c_2 \neq 0$. $\lambda = 2$ のとき, $\mathbf{x} = c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$, $c_3 \neq 0$. (3) $\lambda = 1, 2, 3$. $\lambda = 1$ のとき, $\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $c_1 \neq 0$. $\lambda = 2$ のとき, $\mathbf{x} = c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c_2 \neq 0$. $\lambda = 3$ のとき, $\mathbf{x} = c_3 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $c_3 \neq 0$. (4) $\lambda = 2, -1$(重解). $\lambda = 2$ のとき, $\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c_1 \neq 0$. $\lambda = -1$ のとき, $\mathbf{x} = c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, ただし c_2, c_3 は同時に 0 とならない.

$\boxed{2}$ (1) $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ とおけば, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

(2) $A^n = \dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} (-2)^n + 4^n & 0 & -(-2)^n + 4^n \\ -(-2)^n + 4^n & 2 & -2 + (-2)^n + 4^n \\ -(-2)^n + 4^n & 0 & (-2)^n + 4^n \end{pmatrix}$

[0]※この講義に関する情報はホームページを参照. http://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2021/lasc.html