

1 次の行列 A を対角化せよ.

$$(1) A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (2) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \quad (3) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} \quad (4) A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

2 n を自然数とする. 次の行列 A のべき乗 A^n を計算せよ. ただし, (2) から (4) については, 問題 1 で求めた行列の対角化を利用して計算しても良い.

$$(1) A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2) A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (3) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \quad (4) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$$

⁰解答:

$$\begin{aligned} \text{1} \quad (1) P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ とおけば, } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2) P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ とおけば, } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (3) P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \\ \text{とおけば, } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \quad (4) P = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ とおけば, } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{2} \quad (1) A^n = \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \quad (2) A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ -1+2^n & 1 \end{pmatrix} \quad (3) A^n = \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 3^n & -2^{n+1} + 2 \cdot 3^n \\ 2^n - 3^n & -2^n + 2 \cdot 3^n \end{pmatrix} \quad (4) A^n = \\ \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 \cdot 5^n + 2(-3)^n & 5^n - (-3)^n \\ 4 \cdot 5^n - 4(-3)^n & 2 \cdot 5^n + 2(-3)^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

⁰※この講義に関する情報はホームページを参照. <http://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2021/lasc.html>