

## 第4回 掃き出し法と行列の階数

本日の講義の目標

### 目標 4

- ① 掃き出し法の計算に慣れる.
- ② 行列の階数について理解する.
- ③ 連立方程式の解の存在と解の形を拡大係数行列の階数の言葉で理解する.

## 掃き出し法のテクニック

連立方程式を掃き出し法で求めるとき、主成分の位置を決定し、主成分が1に等しくなるような変形を心がけるべきである。次のように“うまく”変形すれば、途中の計算で分数の成分を回避して変形できる。

### 例 4.1

$$\begin{array}{l} \left( \begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline 3 & -5 & -2 & 2 \\ -4 & 7 & 4 & -5 \\ 4 & -9 & -3 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\textcircled{3} \times 3]{\textcircled{2} \times 3} \left( \begin{array}{ccc|c} 3 & -5 & -2 & 2 \\ -12 & 21 & 12 & -15 \\ 12 & -27 & -9 & 3 \end{array} \right) \\ \xrightarrow[\textcircled{3} - 4 \times \textcircled{1}]{\textcircled{2} + 4 \times \textcircled{1}} \left( \begin{array}{ccc|c} 3 & -5 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & -7 \\ 0 & -7 & -1 & -5 \end{array} \right) \xrightarrow{\textcircled{3} + 7 \times \textcircled{2}} \left( \begin{array}{ccc|c} 3 & -5 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & 27 & -54 \end{array} \right) \end{array}$$

番号の大きな式から順番に用いれば  $z, y, x$  の順に決定され  $x = 1, y = 1, z = -2$  (各自で確認すること!)。最初の変形は (2, 1) 成分と (3, 1) 成分を3の倍数にするための変形であることに注意する。

# 行列の簡約化

与えられた行列  $A$  に対し基本変形を繰り返すことにより、簡約行列  $B$  を得る (すなわち  $A \rightarrow B$ ) ことを  $A$  を**簡約化する**といい、 $B$  を  $A$  の**簡約化**という。これまでの例から簡約化の存在については、方法論的に理解できるのではないだろうか？実はもっと強く次の定理が知られている。

## 定理 4.2 (簡約化の一意性)

任意の行列は基本変形を繰り返すことにより簡約化できる。また与えられた行列の簡約化は唯一通りに定まる。

定理 4.2 は、行列  $A$  をひとつ定めれば、途中でどんな基本変形を行ったとしても、 $A$  の簡約化  $B$  は唯一つに定まることを保証する。

定理 4.2 は“**ベクトルの 1 次独立性**”という線形代数の深くて重要な概念と関係する。

# 行列の階数

定理 4.2 を認めることにより, 次の定義が意味を持つ.

## 定義 4.3

行列  $A$  に対し,  $A$  の簡約化  $B$  に現れる主成分の個数を  $A$  の**階数**といい, 記号では  $\text{rank } A$  と表す.

## 注意 4.4

- ①  $\text{rank } A = (B \text{ の零でない行ベクトルの個数})$
- ②  $A \rightarrow C$  で  $C$  が階段行列のとき,  $\text{rank } A$  は  $C$  の主成分の個数に等しい. ( $A$  を階段行列  $C$  にまで変形すれば,  $A$  の簡約化  $B$  の主成分の位置とその個数がわかる.)

### 例題 4.5

行列  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 7 \\ 1 & 5 & -1 & 8 \end{pmatrix}$  の階数 ( $\text{rank } A$ ) を求めよ.

解答) 基本変形により,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 7 \\ 1 & 5 & -1 & 8 \end{pmatrix} &\xrightarrow{\substack{\textcircled{2}-2\times\textcircled{1} \\ \textcircled{3}-\textcircled{1}}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 6 & -3 & 3 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{\textcircled{3}-2\times\textcircled{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と階段行列に変形できる. したがって  $\text{rank } A = 3$

# 連立方程式の解の存在と解の形

## 定理 4.6

連立方程式

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (\heartsuit)$$

の拡大係数行列を  $\tilde{A} = (A \mid \mathbf{b})$  とする.  $(\heartsuit)$  の解が存在するための必要十分条件は

$$\text{rank } \tilde{A} = \text{rank } A \quad (\clubsuit)$$

が成り立つことである. また条件  $(\clubsuit)$  が成り立つとき, (したがって  $(\heartsuit)$  の解が存在するとき)  $\mathbf{x}$  の次元を  $n$  とすれば次が成り立つ:

- ①  $\text{rank } A = n$  ならば  $(\heartsuit)$  は唯一つの解をもつ.
- ②  $\text{rank } A < n$  ならば  $(\heartsuit)$  は無限個の解を持つ.

# 連立方程式の解のパターン

$n$  変数  $\mathbf{x}$  に関する連立一次方程式

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

は、解の存在と形について次の三つのパターンのどれか一つに該当する。

- ① 解が存在しない (**解なし**) ( $\iff \text{rank } \tilde{A} > \text{rank } A$ )
- ② 解が唯一つ存在する (**一意解**) ( $\iff \text{rank } \tilde{A} = \text{rank } A = n$ )
- ③ 解が無数個存在する (**不定解**) ( $\iff \text{rank } \tilde{A} = \text{rank } A < n$ )

## 例 4.7

$\tilde{A}$	$\left( \begin{array}{ccc c} x & y & z & \\ \hline 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$	$\left( \begin{array}{ccc c} x & y & z & \\ \hline 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & 4 & 5 & 23 \\ 0 & 0 & 6 & 18 \end{array} \right)$	$\left( \begin{array}{ccc c} x & y & z & \\ \hline 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$
$\text{rank } \tilde{A}$	2	3	2
$\text{rank } A$	1	3	2
解の種類	解なし	一意解	不定解

## 例題 4.8

次の連立1次方程式の解の個数について調べよ:

$$(1) \left( \begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline 1 & 3 & 0 & 2 \\ -1 & -4 & 2 & -1 \\ -2 & -6 & 0 & -1 \end{array} \right)$$

$$(2) \left( \begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline 0 & -1 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & 1 & -3 \\ -3 & 13 & 5 & 1 \end{array} \right)$$

解答)

$$\textcircled{1} \text{ (与式)} \xrightarrow{\substack{\textcircled{2}+\textcircled{1} \\ \textcircled{3}+2\times\textcircled{1}}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right). \text{従って解は存在しない.}$$

$$\textcircled{2} \text{ (与式)} \xrightarrow{\textcircled{3}+3\times\textcircled{2}} \left( \begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & 4 & 8 & -8 \end{array} \right) \xrightarrow{\textcircled{1}\leftrightarrow\textcircled{2}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & 8 & -8 \end{array} \right) \\ \xrightarrow{\textcircled{3}+4\times\textcircled{2}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

拡大係数行列と係数行列の階数が一致 (= 2) するので解が存在する. 変数の数は3であるため, 解は無数個存在する.