第 8 回 一次独立と一次従属

本日の講義の目標

目標 8

1. ベクトル空間の定義について理解する.
2. ベクトルの一次独立性の定義について理解する.

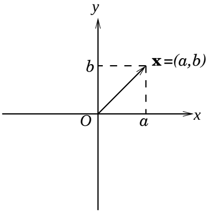
ベクトルの定義

定義 8.1

平面または空間上の矢印 (有向線分) を**ベクトル**という.

- 矢印の根元を**始点**, 矢印の先を**終点**という.
- 矢印の長さを**大きさ**という.

ベクトルは大きさと向きを持ち, これらが等しいベクトルどうしを" 同じ" とみなす. 物理学ではベクトルで力や速度などを表す. 本講義では, アルファベットの太文字 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \ldots, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \ldots$ などを用いてベクトルを表す. 原点 O を始点とするベクトルを**位置ベクトル**という. 任意のベクトルに対し, ただ一つの位置ベクトルが決まり, その終点の座標 (a, b) (または (a, b, c)) をベクトルの**成分表示**という.



ベクトルの和とスカラー倍

定義 8.2

n を自然数とする．n 個の数 (スカラー)$x_1, \dots, x_n$ を並べた

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$$

を (n 次元) **数ベクトル**という．[a]

[a] 数を縦に並べたものを**列ベクトル**, 横に並べたものを**行ベクトル**という．

数ベクトルは平面ベクトル, 空間ベクトルを自然に拡張した概念である．i 番目の数を $\mathbf{x}$ の**第** i **成分**という．

定義 8.3

k をスカラーとする．2 つの数ベクトル $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ と $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ に対し, 和 $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ および $\mathbf{x}$ の k 倍 $k\mathbf{x}$ を次のように定義する:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} + \mathbf{y} &= (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n), \\ k\mathbf{x} &= k(x_1, \dots, x_n) = (kx_1, \dots, kx_n). \end{aligned}$$

ベクトルの和とスカラー倍 (例題)

例題 8.4

空間ベクトル $\mathbf{x} = (1, -2, 1)$ と $\mathbf{y} = (4, 3, 2)$ に対し, 次のベクトルを計算せよ.

(1) $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ (2) $4\mathbf{y}$ (3) $2\mathbf{x} + 3\mathbf{y}$

解答) (1) $\mathbf{x} + \mathbf{y} = (1, -2, 1) + (4, 3, 2) = (1 + 4, -2 + 3, 1 + 2) = (5, 1, 3)$.

(2) $4\mathbf{y} = 4(4, 3, 2) = (16, 12, 8)$.

(3) $2\mathbf{x} + 3\mathbf{y} = 2(1, -2, 1) + 3(4, 3, 2) = (14, 5, 8)$.

ベクトル空間

定理 8.5

V を平面ベクトル全体，または空間ベクトル全体の集合とする．このとき和とスカラー倍に関して，次の 8 つの性質が成り立つ:

1. $\mathbf{x}+\mathbf{y}=\mathbf{y}+\mathbf{x}$ **(交換法則)**
2. $(\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z}=\mathbf{x}+(\mathbf{y}+\mathbf{z})$ **(結合法則)**
3. 零ベクトル $\mathbf{0}$ が存在し，任意の $\mathbf{x}\in V$ に対し $\mathbf{x}+\mathbf{0}=\mathbf{x}$.
4. V の任意の元 $\mathbf{x}$ に対し，$\mathbf{x}+\mathbf{y}=\mathbf{0}$ を満たす V の元 $\mathbf{y}$ が (ただ一つ) 存在する.

任意の実数 a, b と V の任意の元 $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ に対し，

5. $(a+b)\mathbf{x}=a\mathbf{x}+b\mathbf{x}$.
6. $a(\mathbf{x}+\mathbf{y})=a\mathbf{x}+a\mathbf{y}$.
7. $(ab)\mathbf{x}=a(b\mathbf{x})$.
8. $1\mathbf{x}=\mathbf{x}$.

が成り立つ.

ベクトル空間 2

定義 8.6

集合 V に, 和とスカラー倍の 2 つの演算が定義され, 定理 8.5 の (1) から (8) の条件が満たされるとき, V を**ベクトル空間 (または線形空間)** という.

例 8.7

実数を成分とする n 次の列ベクトル全体

$$\mathbb{R}^n := \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \,\middle|\, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$$

は (通常の) 和と実数 (スカラー) 倍に関し $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間である.

同様に複素数を成分とする n 次列ベクトルの全体 $\mathbb{C}^n$ は $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間である.

一次結合

$k=\mathbb{R}$ または $k=\mathbb{C}$ とする．V を k 上のベクトル空間とする．V の元 $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_n$ に対し，

$$c_1\mathbf{a}_1+\cdots+c_n\mathbf{a}_n, \qquad c_1,\dots,c_n\in k$$

の形のベクトルを $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_n$ の (k 上の) **一次結合 (または線形結合)** という．

例 8.8

$$\mathbf{a}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix} \qquad \mathbf{a}_2=\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix} \qquad \mathbf{a}_3=\begin{pmatrix}1\\-5\\8\end{pmatrix}$$

のとき，$\mathbf{a}_3=-2\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2$，つまり $\mathbf{a}_3$ は $\mathbf{a}_1$，$\mathbf{a}_2$ の一次結合である．

上の例で $\mathbf{a}_3=-2\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2$ を書き換えると，

$$2\mathbf{a}_1-\mathbf{a}_2+\mathbf{a}_3=\mathbf{0}$$

と表すことができる．このように $(c_1,c_2,c_3)\neq(0,0,0)$ でもって，

$$c_1\mathbf{a}_1+c_2\mathbf{a}_2+c_3\mathbf{a}_3=\mathbf{0}$$

を満たすものが存在するとき，$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3$ は一次従属であるという．

一次独立と一次従属

V をベクトル空間とする.

定義 8.9

- V の元 $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ が**一次従属とは**, $(c_1, \ldots, c_n) \neq (0, \ldots, 0)$ が存在して,
$$c_1\mathbf{a}_1 + \cdots + c_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0}$$
を満たすことをいう.
- V の元 $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ が**一次独立とは**,
$$c_1\mathbf{a}_1 + \cdots + c_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0}$$
ならば, $(c_1, \ldots, c_n) = (0, \ldots, 0)$ を満たすことをいう.

任意のベクトル $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ に対し, 一次独立であるか, 一次従属であるか, どちらか一方だけが成り立つ.

一独立性の判定 1

例題 8.10

次のベクトルの ($\mathbb{R}$ 上の) 一次独立性を判定せよ． $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

解答) $c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 = 0$ とする $(c_1, c_2 \in \mathbb{R})$．このとき

$$c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

c_1, c_2 を未知数とする連立方程式の解は，

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{①+3\times②} \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 4 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{①\leftrightarrow②} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{array}\right)$$

より $c_1 = c_2 = 0$．よって $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ は一次独立である．

一次独立性の判定 2

例題 8.11

次のベクトルの ($\mathbb{R}$ 上の) 一次独立性を判定せよ:

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

解答) $c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + c_3\mathbf{a}_3 = 0$ とする ($c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$). このとき

$$c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + c_3\mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

c_1, c_2, c_3 を未知数とする連立方程式の解は,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{③-①} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{③-②} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

より $-c_1 = c_2 = c_3 = t$ (ただし t は任意の実数). 例えば $(c_1, c_2, c_3) = (-1, 1, 1)$ とすれば $c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + c_3\mathbf{a}_3 = \mathbf{0}$. よって $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ は一次従属である.