第 7 回 逆行列

本日の講義の目標

目標 7

1. 逆行列の定義について理解する.
2. 逆行列を求める計算について理解する.

逆行列

以下 E_n を n 次の単位行列とする.

例 7.1

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

定義 7.2

n 次正方行列 A に対し

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E_n$$

を満たす行列 A^{-1} を A の**逆行列**という.

A^{-1} の $^{-1}$ は “インバース” と読む. A に対し A^{-1} がいつでも存在するとは限らず,

定義 7.3

A^{-1} が存在する行列 A を**正則行列**という.

注意 7.4

A に対し A の逆行列は (もし存在すれば) 一意に定まる. 実際, B_1 と B_2 がともに A の逆行列ならば,

$$B_1 = B_1 E_n = B_1(AB_2) = (B_1 A)B_2 = E_n B_2 = B_2$$

となる.

例 7.5

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$ のとき,

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2$$

を満たす. 同様に計算すると $BA = E_2$ がわかるので, $B = A^{-1}$.

基本行列

E_n を n 次の単位行列とする.

定義 7.6

A を $m \times n$ 行列とし, $T : A \to B$ を行基本変形, すなわち定義 4.3 における三種類のいずれかひとつの変形とする. 同じ変形を単位行列 E_m に行って得られる行列 P_T を T の**基本行列**という.

例 7.7

T を $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{②-2\times①} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ とすれば $P_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ である.

三種類の行基本変形 T それぞれに対し, 基本行列 P_T が定まる. 行列 A に行基本変形 $T : A \to B$ を行うことは

“行列 A に左から行列 P_T を乗じて B を得る”

ことに等しい.

逆行列の計算

A を n 次行列とする. A に基本変形 $T_1, T_2, \dots, T_k$ を行い, 単位行列 E_n を得たとする. 行列の行基本変形を行うことは基本行列を左からかけることに等しいので, このとき T_i の基本行列 $P_i := P_{T_i}$ が存在し,

$$P_k P_{k-1} \cdots P_1 A = E_n$$

を満たす. $B = P_k P_{k-1} \dots P_1$ とおけば $BA = E_n$ を得る. 実は $AB = E_n$ であることも示すことができ (定理 14.2 と注意 7.4), $B = A^{-1}$ となる.

定理 7.8

A を n 次行列とする.

$$(A \mid E_n) \longrightarrow (E_n \mid B)$$

ならば, A は正則行列であり $B = A^{-1}$ となる.

逆行列の計算 2

例題 7.9

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ のとき, A の逆行列 A^{-1} を求めよ.

解答)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[③-2\times②]{①-2\times②} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -4 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{③\times(-1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -4 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[②-2\times③]{①+4\times③} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 6 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

よって, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -4 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

逆行列が存在するための条件

定理 7.10

n 次行列 A に対し, 次の 3 つの条件は同値である:

1. A は正則 (逆行列 A^{-1} が存在).
2. $\operatorname{rank} A = n$.
3. A に基本変形を行い, 単位行列 E_n が得られる (すなわち $A \to E_n$).

$n = 2$ のときは, 逆行列について次が知られている:

定理 7.11

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とする. A^{-1} が存在するためには $ad - bc \neq 0$ が必要十分であり,

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

例 7.12

$A = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 2 & -6 & 4 \end{pmatrix}$ のとき,

$$A \xrightarrow{③+2\times①} \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{③-2\times②} \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

したがって, $\operatorname{rank} A < 3$ となり, A^{-1} は存在しない (A は正則でない).

例 7.13

$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$ のとき, $3 \times 6 - 5 \times 1 = 13 \neq 0$. よって A^{-1} が存在し,

$A^{-1} = \dfrac{1}{13} \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.