

第5回 連立方程式の一般解

本日の講義の目標

目標 5

- ① 連立方程式の解をパラメータを用いて表す方法について理解する.
- ② 連立方程式に解が存在しない場合の扱いについて理解する.

連立方程式とパラメータ

前回習った方法 (基本変形) を次の方程式に適用すると, 係数行列を単位行列まで変形できない.

例 5.1

連立方程式 $\begin{cases} x + 2y = 2 \cdots \textcircled{1} \\ 2x + 4y = 4 \cdots \textcircled{2} \end{cases}$ $\cdots (\heartsuit)$ の拡大係数行列 \tilde{A} に対し,

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{\textcircled{2} - 2 \times \textcircled{1}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

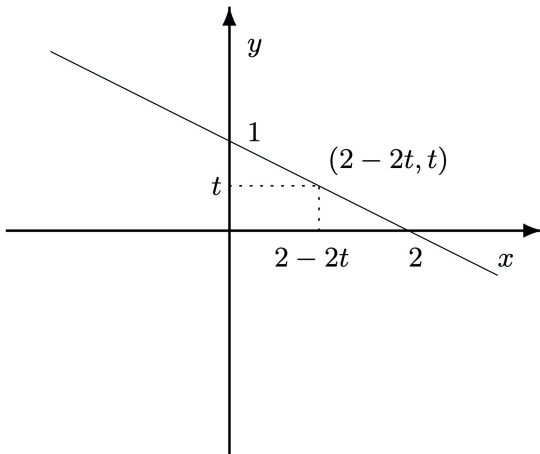
$\textcircled{2}$ は $\textcircled{1}$ を 2 倍した式に等しいので当然である. 方程式 (\heartsuit) は見かけ上 2 本の式からなるが, 本質的には 1 本の式 ($\textcircled{1}$ または $\textcircled{2}$) で定義されている. このような場合はパラメータ t を用いて全ての解を表せる. 実際, $y = t$ とおくと $\textcircled{1}$ 式により $x + 2t = 2$. これを x について解くと,

$$\begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = t. \end{cases} \quad (t \text{ は任意})$$

と表せる. これが方程式 (\heartsuit) の解となる.

方程式の解の空間と幾何

方程式 (♡) の解は xy -平面における直線 $x + 2y = 2$ 上の点と一対一に対応する.
“方程式を解く” ことは “全ての解を求める” ことなので, パラメータ t が必要になる理由がわかる.



連立方程式とパラメータ 2

例題 5.2

$$\text{連立方程式} \begin{cases} x + 3y + 5z = -1 \\ x + 2y + 6z = 0 \\ 2x + 3y + 13z = 1 \end{cases} \quad \text{を解け.}$$

解答) 拡大係数行列を変形すると

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 1 & 2 & 6 & 0 \\ 2 & 3 & 13 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\textcircled{2}-\textcircled{1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{\textcircled{1}\times(-1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} \textcircled{1}-3\times\textcircled{2} \\ \textcircled{3}+3\times\textcircled{2} \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 8 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

$z = t$ とおけば、最後の行列の①と②により $x = 2 - 8t$, $y = -1 + t$. したがって、

$$\begin{cases} x = 2 - 8t \\ y = -1 + t \\ z = t \end{cases} \quad (t \text{ は任意})$$

簡約行列

掃き出し法により連立方程式の解を求めるとき、拡大係数行列を簡約行列まで変形する (**行列を簡約化する**) ことが重要である。

定義 5.3 (簡約行列)

次の条件を全て満たす行列を**簡約行列**という。

- ① 零行があれば、非零行よりも下に位置する。
- ② 非零行の**主成分** (左から見て一番最初の零でない成分) は 1 に等しい。
- ③ 主成分は下の行ほど右に位置する。
- ④ 主成分を含む列において、主成分以外の他の成分は全て 0 に等しい。

例 5.4 (簡約行列の例)

$$\begin{pmatrix} \textcircled{1} & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & \textcircled{1} & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \textcircled{1} & 2 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

丸囲みの数字の 1 (①) が主成分である (わかりやすいように○で囲んだ)。

簡約行列とパラメータの置き方

拡大係数行列を簡約化したのち、主成分 (①) を含まない列の変数をパラメータに取ることにより、連立方程式の (一般) 解を表すことができる。

例 5.5

連立方程式
$$\left(\begin{array}{cccc|c} \textcircled{x} & y & \textcircled{z} & w & \\ \hline \textcircled{1} & 2 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$
 において、主成分を含まない列にある変数 y

と w をそれぞれパラメータ t_1 と t_2 に取る。この方程式の解は

$$\begin{cases} x = 5 - 2t_1 - 4t_2 \\ y = t_1 \\ z = 1 - 2t_2 \\ w = t_2. \end{cases} \quad (\text{ただし } t_1, t_2 \text{ は任意})$$

と表せる。

解が存在しない方程式

拡大係数行列を簡約化したのち、次のように矛盾する式が出る場合には方程式に解は存在しない(“解なし”という)。

例 5.6

$$\left(\begin{array}{ccc|c} x & y & z & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 10 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{\textcircled{2}-\textcircled{1} \\ \textcircled{3}-2\times\textcircled{1}}} \left(\begin{array}{ccc|c} x & y & z & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{\textcircled{1}-\textcircled{2} \\ \textcircled{3}-\times\textcircled{2}}} \left(\begin{array}{ccc|c} x & y & z & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

最後の拡大係数行列において第3行の式(③)は

$$0x + 0y + 0z = 1,$$

すなわち $0 = 1$ を要請する。したがって、この方程式の解は存在しない。

階段行列

掃き出し法により連立方程式の解を求めるとき、拡大係数行列を(早い段階で)階段行列まで変形することが肝要である。階段行列は簡約行列の一般化である:

定義 5.7

次の条件を全て満たす行列を**階段行列**という。

- ① 零行があれば、非零行よりも下に位置する。
- ② 主成分は下の行ほど右に位置する。
- ③ 主成分を含む列において、主成分より下に位置する成分は全て0に等しい。

階段行列において、非零行ベクトルの主成分は1とは限らず、主成分を含む列において、主成分の上に位置する成分は全て0とは限らない。

例 5.8 (階段行列の例)

$$\begin{pmatrix} \textcircled{2} & -1 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & \textcircled{4} & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \textcircled{2} & -1 & 1 & 5 \\ 0 & \textcircled{-2} & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \textcircled{3} & 0 \end{pmatrix}$$

わかりやすいように主成分を○で囲った。

階段行列と連立方程式

拡大係数行列を階段行列になるまで変形すれば、方程式の解の存在や解の形が明らかとなる。

例 5.9

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline 1 & -1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 7 \\ 1 & 5 & -1 & 8 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{\textcircled{2}-2\times\textcircled{1} \\ \textcircled{3}-\textcircled{1}}} \left(\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 6 & -3 & 3 \end{array} \right) \\ \xrightarrow{\textcircled{3}-2\times\textcircled{2}} \left(\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{array} \right) \end{array}$$

と階段行列に変形され、唯一の解を持つことがわかる。番号の大きい式から順番に用いると、 $\textcircled{3}$ より $3z = 9$ 。したがって $z = 3$ 。 $\textcircled{2}$ より $3y - 3 \times 3 = -3$ 。したがって $y = 2$ 。 $\textcircled{1}$ より $x - 2 + 6 = 5$ 。したがって $x = 1$ 。

階段行列まで変形した後は、上記のように直接代入によって求めても良いが、最後の行列を簡約行列になるまで変形して解を求めても良い。