第2回 極形式とべき乗の計算

本日の講義の目標

目標 2

1. 複素数の極形式について理解する.
2. 複素数のべき乗計算 (ド・モアブルの公式) について理解する.

極形式

複素平面上の点 $z = x + iy$ を考える. z と原点 O との距離は z の絶対値 $r = |z|$ (> 0) に等しく, 実軸の正の向きと z と O を結ぶ線分のなす角は z の偏角 $\theta = \arg(z)$ $(0 \leq \theta < 2\pi)$ に等しい (前回のプリントの図 1 参照). 従って, z の実部 x と虚部 y はそれぞれ

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta$$

と表せ, これを元の $z = x + iy$ に代入すれば

$$z = x + iy = r\cos\theta + ir\sin\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta) \tag{2.1}$$

を得る.

定義 2.1

複素数 z を, 絶対値 r と偏角 θ を用いて表す表し方

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

を z の**極形式**と呼ぶ.

例題 2.2

1. $\sqrt{3}+i$ を極形式を用いて表せ.
2. $|z|=2,\ \arg(z)=\dfrac{2}{3}\pi$ である複素数 z を直交形式 $x+iy$ $(x,y\in\mathbb{R})$ を用いて表せ.

解答) (1) $|\sqrt{3}+i|=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1}=2$. $\arg(\sqrt{3}+i)=\dfrac{\pi}{6}$. よって求める極形式は, $\sqrt{3}+i=2\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$.

(2) $2\left(\cos\dfrac{2}{3}\pi+i\sin\dfrac{2}{3}\pi\right)=2\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)=-1+\sqrt{3}i$.

問題 2.3

1. 次の複素数を極形式を用いて表せ：
(a) $\sqrt{3}-i$ (b) $-1-\sqrt{3}i$ (c) $\sqrt{2}+\sqrt{2}i$ (d) $-2i$
2. 次の複素数を直交形式 $x+iy$ を用いて表せ：
(e) $8\left(\cos\frac{5}{6}\pi+i\sin\frac{5}{6}\pi\right)$ (f) $2\left(\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi\right)$ (g) $8\left(\cos 7\pi+i\sin 7\pi\right)$

*

---

*(a) $2\left(\cos\frac{11}{6}\pi+i\sin\frac{11}{6}\pi\right)$ (b) $2\left(\cos\frac{4}{3}\pi+i\sin\frac{4}{3}\pi\right)$ (c) $2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ (d) $2\left(\cos\frac{3}{2}\pi+i\sin\frac{3}{2}\pi\right)$ (e) $-4\sqrt{3}+4i$ (f) $-\sqrt{2}+\sqrt{2}i$ (g) -8

複素数の積・商と絶対値・偏角

複素数の偏角 $\theta = \arg(z)$ の定義において, θ の範囲を $0 \leq \theta < 2\pi$ に取った. これは z に対し $\arg(z)$ を一意的に定義するためである. しかし, 偏角の定義で 2π の整数倍を無視して考える[†] と都合が良い.

定理 2.4

複素数 α, β に対し次が成り立つ：

1. $|\alpha\beta| = |\alpha||\beta|$ かつ $\arg(\alpha\beta) = \arg(\alpha) + \arg(\beta)$
2. $\beta \neq 0$ のとき, $\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right| = \dfrac{|\alpha|}{|\beta|}$ かつ $\arg\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right) = \arg(\alpha) - \arg(\beta)$

複素数の積 $\alpha\beta$ の絶対値は, それぞれの絶対値の積に等しく, $\alpha\beta$ の偏角は, それぞれの偏角の和に等しい. この定理の系 (定理からすぐに出てくる別の定理) として次を得る.

[†]つまり z の偏角が θ のとき $\theta + 2n\pi$ も z の偏角と考える

複素数の冪乗

定理 2.5

z を複素数とし, 絶対値を r, 偏角を θ とする. $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ のベキ乗 z^n は

$$z^n = r^n\left(\cos n\theta + i\sin n\theta\right)$$

と表される.

特に, $z = \cos\theta + i\sin\theta$ のとき ($|z| = 1$ のとき)

$$z^n = \cos n\theta + i\sin n\theta \qquad (n \text{ は整数})$$

を得る. この式は**ド・モアブル (de Moivre) の公式**として良く知られている.

例題 2.6

$(-\sqrt{3}+i)^8$ を計算せよ.

解答) $z=-\sqrt{3}+i$ を極形式で表せば, $z=2\left(\cos\frac{5}{6}\pi+i\sin\frac{5}{6}\pi\right)$ となる. 定理 2.5 より,

$$z^n=2^n\left(\cos\frac{5n}{6}\pi+i\sin\frac{5n}{6}\pi\right).$$

$n=8$ のとき,

$$\begin{aligned} z^8 &= 2^8\left(\cos\frac{40}{6}\pi+i\sin\frac{40}{6}\pi\right) \\ &= 256\left(\cos\frac{20}{3}\pi+i\sin\frac{20}{3}\pi\right) \\ &= 256\left(\cos\left(6+\frac{2}{3}\right)\pi+i\sin\left(6+\frac{2}{3}\right)\pi\right) \\ &= 256\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right) \\ &= 256\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=-128+128\sqrt{3}i. \end{aligned}$$

問題 2.7

次の計算をせよ．[a]

1. $(1+\sqrt{3}i)^{10}$
2. $(1-i)^4$
3. $(1+\sqrt{3}i)^{-8}$
4. $(-2\sqrt{3}+6i)^{-4}$

---

[a](1) $-512-512\sqrt{3}i$ (2) -4 (3) $\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{512}$ (4) $\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{4608}$