第 17 回 固有値と固有ベクトル 2

本日の講義の目標

目標 17

1. 3 次以上の行列の固有値と固有ベクトルの計算や, 対角化について理解する.

固有多項式

$A = (a_{ij})$ を n 次正方行列とし, E を n 次単位行列とする.

定義 17.1

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$$

により定まる λ に関する多項式を A の**固有多項式**という.

行列 A の固有多項式を $\Phi_A(\lambda)$ で表せば, $\Phi_A(\lambda)$ は n 次多項式

$$(-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1}(a_{11} + \cdots + a_{nn})\lambda^{n-1} + \cdots + |A|$$

に等しい. 方程式 $\Phi_A(\lambda) = 0$ を A の**固有方程式**と呼ぶ. 定理 15.5 より次が成り立つ.

定理 17.2

λ が A の固有値 $\Longleftrightarrow \Phi_A(\lambda) = 0.$

注意 17.3

1. A の固有方程式は, 複素数の範囲で (解の重複度も含め) ちょうど n 個の解を持つ.
2. $A = (a_{ij})$ の固有多項式 $\Phi_A(\lambda)$ の $(n-1)$ 次の係数に現れる
$$a_{11} + \cdots + a_{nn}$$
を A の**トレース (固有和)** といい, 記号 $\operatorname{tr} A$ で表す.

例 17.4

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ のとき, A の固有多項式は

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc)$$

であり, A のトレースは $\operatorname{tr} A = a + d$ である.

固有値の計算

例題 17.5

行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ の固有値 λ を全て求めよ.

解答)　A の固有多項式は, サラスの公式より

$$\begin{aligned} |A - \lambda E| &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 3 \\ 3 & -2-\lambda & 3 \\ -1 & 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (2-\lambda)(-2-\lambda)^2 + 3 + 9 + 3(-2-\lambda) - 3(2-\lambda) + 3(-2-\lambda) \\ &= -\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda + 2 \\ &= -(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda+2). \end{aligned}$$

従って A の固有値は $\lambda = -2, -1, 1$.

固有ベクトルの計算

固有ベクトルの計算は, 2 次のときと同様に各固有値 λ に対し, 連立方程式

$$(A - \lambda E)\mathbf{x} = 0,$$

を解き, 解 $\mathbf{x} \neq 0$ を求める. $A = (a_{ij})$ のときは, この方程式は

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_{12} + \cdots + a_{1n}x_{1n} & = 0 \\ a_{21}x_{21} + (a_{22} - \lambda)x_{22} + \cdots + a_{2n}x_{2n} & = 0 \\ \vdots & \\ a_{n1}x_{n1} + a_{n2}x_{n2} + \cdots + (a_{nn} - \lambda)x_{nn} & = 0 \end{cases}$$

と表される. この方程式を満たす $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ でもって, いずれか少なくとも 1 つの x_i $(i = 1, \ldots, n)$ が 0 でない $\mathbf{x}$ が A の固有ベクトルである.

固有ベクトルの計算 2

例題 17.6

行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ の固有値 λ と固有ベクトル $\mathbf{x}$ を全て求めよ.

解答)　A の固有多項式は,

$$
\begin{aligned}
|A - \lambda E| &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (1-\lambda)\left\{(1-\lambda)(4-\lambda) - (-2)\right\} \\
&= -(\lambda - 1)(\lambda^2 - 5\lambda + 6) \\
&= -(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3)
\end{aligned}
$$

従って A の固有値は $\lambda = 1, 2, 3$ である.

固有ベクトルの計算 3

- $\lambda = 1$ のとき, $A - E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. 連立方程式

  $(A - E)\mathbf{x} = 0$ を解けば, 固有ベクトルは $\mathbf{x}_1 = t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (t_1 \neq 0)$.

- $\lambda = 2$ のとき, $A - 2E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

  $(A - 2E)\mathbf{x} = 0$ を解けば, 固有ベクトルは $\mathbf{x}_2 = t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t_2 \neq 0)$.

- $\lambda = 3$ のとき, $A - 3E = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

  $(A - 3E)\mathbf{x} = 0$ を解けば, 固有ベクトルは $\mathbf{x}_3 = t_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t_3 \neq 0)$.

行列の対角化

例題 17.7

行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ を対角化せよ.

解答) A の固有方程式 $|A - \lambda E| = 0$ を解いて固有値を求めると $\lambda = 0, 2, 3$ となる (各自で確認).

- $\lambda = 0$ のとき, $A - 0E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. 連立方程式 $(A - 0E)\mathbf{x} = 0$ を解けば, 固有ベクトルは $\mathbf{x}_1 = t \begin{pmatrix} -2 \\ 1/3 \\ 1 \end{pmatrix} = t' \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ $(t, t' \neq 0)$.

- $\lambda=2$ のとき, $A-2E=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$. $(A-2E)\mathbf{x}=0$ を解けば, 固有ベクトルは $\mathbf{x}_2=t\begin{pmatrix}0\\ 1\\ -1\end{pmatrix}\quad(t\neq 0)$.
- $\lambda=3$ のとき, $A-3E=\begin{pmatrix}-3 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$. $(A-3E)\mathbf{x}=0$ を解けば, 固有ベクトルは $\mathbf{x}_3=t\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}\quad(t\neq 0)$.

従って, $P=\begin{pmatrix}\mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 3 & -1 & 0\end{pmatrix}$ とおけば,

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$$

となる.

注意

注意 17.8

1. 固有ベクトルは定数倍をのぞいてしか決まらない:
$$\mathbf{x} \text{ が } A \text{ の固有ベクトル} \Longrightarrow c\mathbf{x} \ (c \neq 0) \text{ も } A \text{ の固有ベクトル}$$
2. 対角化の仕方は一通りではない. 固有ベクトルの並べる順番を変えたものや, 固有ベクトルに零でない定数をかけたものなど, 正則行列 P の選び方に応じて, 様々な対角化の仕方がある (注意 16.3 参照).
3. 行列 A によっては, 固有多項式が重根 (固有方程式が重解) を持つ場合がある. このような場合でも対角化可能な場合があるが, 不可能な場合も存在する. 詳しくは次回に説明する.