第 15 回 固有値と固有ベクトル

本日の講義の目標

目標 15

1. 行列の固有値と固有ベクトルについて理解する.

線形変換

A を 2 次行列とする. xy-平面を V で表し, V から V への写像 $T : V \to V$ を

$$T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

により定義する.

例 15.1

$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ のとき $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x \\ 2y \end{pmatrix}$ となる. T はそれぞれ x 軸方向に 3 倍, y 軸方向に 2 倍する写像 (変換) となる.

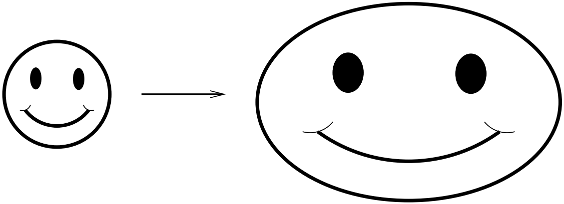

Figure: x 軸方向に 3 倍, y 軸方向に 2 倍

固有値と固有ベクトル

定義 15.2

A を n 次 (正方) 行列とする. 零ベクトルでない n 次元ベクトル $\mathbf{x}$ が存在し,

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

を満たすとき, $\mathbf{x}$ を A の**固有ベクトル**, λ を A の**固有値**という.

例 15.3

$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ のとき, $A\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 3\mathbf{e}_1$. 同様に, $A\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\mathbf{e}_2$ が得られるので, $\mathbf{e}_1$ と $\mathbf{e}_2$ はともに A の固有ベクトル, $\lambda = 3, 2$ は A の固有値である.

例 15.1 からもわかるように, A の固有値と固有ベクトルは, A から定まる写像 $T : \mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ の "拡大率" と "拡大する方向 (ベクトル)" を表す.

固有値と固有ベクトルの例

例 15.4

$A = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ のとき, $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ とおけば,

$$A\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 5\mathbf{x}_1.$$

同様に, $A\mathbf{x}_2 = (-1)\mathbf{x}_2$ を得るので, $\mathbf{x}_1$ と $\mathbf{x}_2$ はともに A の固有ベクトル, $\lambda = 5, -1$ は A の固有値である.

例 15.3 と 15.4 において, 2 次行列 A に対し適当な固有ベクトル $\mathbf{x}_1$ と $\mathbf{x}_2$ を選べば,

$$A\mathbf{x}_i = \lambda_i \mathbf{x}_i \qquad (i = 1, 2)$$

を満たす固有値 λ_1 と λ_2 が存在した. このような $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ の求め方は？

固有値と固有方程式 1

n を自然数とし A を n 次行列とする．λ が A の固有値であるための必要十分条件は

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \tag{15.1}$$

を満たす n 次元ベクトル $\mathbf{x} \neq 0$ が存在することである．式 (15.1) を変形すると,

$$(A - \lambda E)\mathbf{x} = A\mathbf{x} - \lambda E\mathbf{x} = A\mathbf{x} - \lambda\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

となるので, 定理 6.6 よりこの条件は

$$\mathrm{rank}(A - \lambda E) < n \tag{15.2}$$

と同値である．また定理 7.10 により，この条件は $A - \lambda E$ が逆行列を持たないこととも同値である．以上より次の定理を得る．

固有値と固有方程式 2

定理 15.5

A を n 次行列とする．このとき，

$$\lambda \text{ が } A \text{ の固有値} \iff \mathrm{rank}(A - \lambda E) < n$$

が成り立つ．とくに $n = 2$ のとき λ が $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の固有値であるためには，

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc = 0$$

を満たすことが必要十分である．

定理 15.5 は定理 7.11 から従う．

固有値と固有ベクトルの求め方

例題 15.6

行列 $A = \begin{pmatrix} 8 & 15 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ の固有値 λ と固有ベクトル $\mathbf{x}$ を求めよ.

解答)　A の固有多項式 $|A - \lambda E|$ を計算すると,

$$\begin{vmatrix} 8-\lambda & 15 \\ -2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (8-\lambda)(-3-\lambda) - 15 \cdot (-2) = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda - 2)(\lambda - 3).$$

従って A の固有値は $\lambda = 2, 3$.

- $\lambda = 2$ のとき, 基本変形より $A - 2E = \begin{pmatrix} 6 & 15 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ となる. 連立方程式 $(A - 2E)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ を解いて, 求める固有ベクトルは $\mathbf{x} = t_1 \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$ $(t_1 \neq 0)$.
- $\lambda = 3$ のとき, 基本変形により $A - 3E = \begin{pmatrix} 5 & 15 \\ -2 & -6 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ となる. $(A - 3E)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ を解いて, 固有ベクトルは $\mathbf{x} = t_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad (t_2 \neq 0)$.

固有値の求め方(まとめ)

固有値と固有ベクトルの求め方の手順

1. A の固有方程式 $|A-\lambda E|=0$ を解き, A の固有値 λ を求める.
   $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ のとき,
   $$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2-(a+d)\lambda+ad-bc.$$
2. A の各固有値 λ に対し, 連立方程式
   $$(A-\lambda E)\mathbf{x}=\mathbf{0}$$
   を解き, 固有ベクトル $\mathbf{x}$ を求める.

注意 15.7

$\mathbf{x}$ が A の固有ベクトルならば, 定数 $c\neq 0$ に対し $c\mathbf{x}$ も A の固有ベクトルである. 行列の固有ベクトルを求める際には, パラメータを用いて固有ベクトルの (空間) 全体を表す.

例題 15.8

2 次正方行列 A が $A\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ かつ $A\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ を満たすとする．このとき A の定める線形変換 $T(\mathbf{x})=A\mathbf{x}$ により下の図形（ニコニコマーク）はどのような図形に写されるか? 図形の概形を描け.