第 1 回 複素数の演算と複素平面

本日の講義の目標

目標 1

1. 複素数の四則演算について理解する.
2. 複素平面について理解する.

複素数の定義

実数全体の集合を $\mathbb{R}$ で表す.

定義 1.1

2 つの実数 a, b を用いて

$$\alpha = a + bi, \qquad \text{ただし } i = \sqrt{-1}$$

の形に表される数 α を**複素数**という.

本講義では複素数を表す記号として $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ などの記号を用いる.

実部, 虚部

複素数全体の集合を $\mathbb{C}$ で表す．すなわち，

$$\mathbb{C} := \left\{a + bi \,\middle|\, a, b \in \mathbb{R}\right\}.$$

定義 1.2

複素数 $\alpha = a + bi$ に対し，a, b をそれぞれ α の**実部**, **虚部**と呼び，それぞれ記号 $\mathrm{Re}(\alpha)$, $\mathrm{Im}(\alpha)$ で表す．

例 1.3

$\mathrm{Re}(3 - 5i) = 3$, $\mathrm{Im}(3 - 5i) = -5$

複素数の演算

定義 1.4

2 つの複素数 $\alpha = a + bi,\ \beta = c + di\ (a, b, c, d \in \mathbb{R})$ に対し, 次が成り立つ:

1. $\alpha = \beta \iff a = c$ かつ $b = d$
2. 和：$\alpha + \beta = (a + c) + (b + d)i$
差：$\alpha - \beta = (a - c) + (b - d)i$
3. 積：$\alpha\beta = (ac - bd) + (ad + bc)i$
4. 商：$\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \dfrac{bc - ad}{c^2 + d^2}i$

和・差は実部と虚部をそれぞれ足し・引きする. 積・商は式を展開して, $i^2 = -1$ で読み替える.

例題 1.5

次の計算をせよ：(1) $(1-4i)(3+i)+2i(2+3i)$ (2) $\dfrac{1+3i}{2-3i}$

1.

$$\begin{aligned}(1-4i)(3+i)+2i(2+3i) &= 3+i-12i-4i^2+4i+6i^2\\ &= 3+i-12i+4+4i-6\\ &= (3+4-6)+(1-12+4)i\\ &= 1-7i.\end{aligned}$$

2.

$$\frac{1+3i}{2-3i}=\frac{(1+3i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)}=\frac{-7+9i}{4-9i^2}=\frac{-7+9i}{13}.$$

問題 1.6

次の計算をせよ[a]：(1) $(2+3i)(5-3i)+2i(3+5i)$ (2) $\dfrac{-7+22i}{4+5i}$

[a] (1) $9+15i$ (2) $2+3i$

複素平面

複素数 $\alpha = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ に対し, 平面上の点 (a, b) を対応させる．この対応により, 複素数全体の集合 $\mathbb{C}$ と平面を同一視する．この平面を**複素平面**という．

複素数 $\alpha = a + bi \longleftrightarrow$

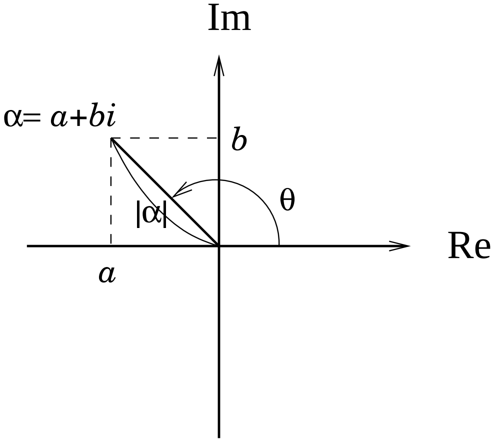

Figure: 複素平面

絶対値, 偏角, 共役複素数

定義 1.7

複素数 $\alpha = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ に対し,

$$|\alpha| = \sqrt{a^2 + b^2}, \qquad \arg(\alpha) = \theta$$

をそれぞれ α の**絶対値**と**偏角**という.

絶対値は複素平面において, 複素数に対応する点と原点との距離を表す. 偏角は実軸の正の向きからの角度を表す.

定義 1.8

複素数 $\alpha = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ に対し, 複素数 $\overline{\alpha} = a - bi$ を α の**共役複素数**という.

共役複素数は複素平面において, 実軸に関しもとの複素数と対称な点に対応する.

絶対値に関する性質

定理 1.9

複素数 α に対し, 次が成り立つ.

1. $|\overline{\alpha}| = |\alpha|$
2. $|\alpha|^2 = \alpha\overline{\alpha}$
3. $|\alpha| = 1 \iff \overline{\alpha} = \dfrac{1}{\alpha}$
4. $|\mathrm{Re}(\alpha)| \leq |\alpha|$ かつ $|\mathrm{Im}(\alpha)| \leq |\alpha|$

問題 1.10

1. 上の定理を証明せよ.
2. $|\alpha| = 1$ かつ $\alpha \neq -1$ のとき, $\dfrac{1}{1+\alpha} + \dfrac{1}{1+\overline{\alpha}}$ を求めよ.
3. $|\alpha| = 1$ かつ $|\alpha - i| = 1$ を満たす複素数 α を全て求めよ.

---

(1) 省略　(2) 1　(3) $\alpha = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$