線形代数 (SC), 第 19 回演習問題

2021/1/14 担当：那須

$\boxed{1}$ 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とする.

(1) A の固有値を全て求めよ.

(2) A を対角化せよ.

(3) A^n $(n = 0, 1, \dots)$ を求めよ.

(4) $a_0 = 1,\, a_1 = 1,\, a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$ で定義される数列 $\{a_n\}$ $(n = 0, 1, \dots)$ の一般項 a_n を求めよ.

---

[0]解答:

$\boxed{1}$ (1) $|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-\lambda) - 2 = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda+1)(\lambda-2)$. よって A の固有値は $\lambda = -1, 2$.

(2)
- $\lambda = -1$ のとき,

$$A + E = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{基本変形}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A の固有ベクトル (の 1 つ) は, $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

- $\lambda = 2$ のとき,

$$A - 2E = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{基本変形}} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A の固有ベクトル (の 1 つ) は, $\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

よって $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ のとき, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ となる.

(3)

$$\begin{aligned} A^n &= P \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^n P^{-1} = P \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \left(\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} (-1)^n & 2^{n+1} \\ (-1)^{n+1} & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} (-1)^n + 2^{n+1} & 2(-1)^{n+1} + 2^{n+1} \\ (-1)^{n+1} + 2^n & 2(-1)^{n+2} + 2^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(4) $\mathbf{a}_n = \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix}$ と置くと, $\mathbf{a}_n = A\mathbf{a}_{n-1} = \cdots = A^{n-1}\mathbf{a}_1 = A^{n-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix}$ となる. $a_0 = a_1 = 1$ より

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_n &= A^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} (-1)^{n-1} + 2^n & 2(-1)^n + 2^n \\ (-1)^n + 2^{n-1} & 2(-1)^{n+1} + 2^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} (-1)^{n-1} + 2^n + 2(-1)^n + 2^n \\ (-1)^n + 2^{n-1} + 2(-1)^{n+1} + 2^{n-1} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -(-1)^n + 2(-1)^n + 2 \cdot 2^n \\ -(-1)^{n+1} + 2(-1)^{n+1} + 2 \cdot 2^{n-1} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} (-1)^n + 2^{n+1} \\ (-1)^{n-1} + 2^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

よって求める数列 a_n の一般項は, $a_n = \dfrac{1}{3} \left\{ (-1)^n + 2^{n+1} \right\}, \qquad (n = 0, 1, 2, \dots)$.

[0]※この講義に関する情報はホームページを参照. http://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2020/lasc.html