

1] 次の行列 A を対角化せよ.

$$(1) A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \quad (2) A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (3) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

2] n を整数とする. 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ のべき乗 A^n を計算せよ.

3] (1) n 次正方行列 A の固有多項式が

$$|A - \lambda E| = (-1)^n (\lambda - a_1)^{m_1} \dots (\lambda - a_k)^{m_k}, \quad (\text{ただし } i \neq j \text{ のとき } a_i \neq a_j)$$

のように 1 次式の積に分解するとき, A が対角化可能であるための必要十分条件を書け.

(2) 次の行列の中で対角化が可能でないものを全て選び, 空欄の中に番号を記入せよ. なお, 解答は答え (番号) のみで良い.

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2) \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad (3) \begin{pmatrix} 7 & -9 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}, \quad (4) \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5) \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$(6) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (7) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (8) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

答

⁰解答:

$$1] (1) P = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ とおけば, } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2) P = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ とおけば, } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3) P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ とおけば, } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$2] A^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 + (-2)^n & 2 + (-2)^{n+1} \\ 1 - (-2)^n & 1 - (-2)^{n+1} \end{pmatrix}$$

$$3] (1) \text{ 各 } i = 1, \dots, k \text{ について } n - \text{rank}(A - a_i E) = m_i \text{ が成り立つ.} \quad (2) (1), (3), (6), (8)$$

⁰※この講義に関する情報はホームページを参照. <http://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2020/lasc.html>