線形代数 (SC), 第 16 回演習問題

2020/12/14 担当：那須

$\boxed{1}$ 次の行列 A を対角化せよ.

(1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$　(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$　(3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$　(4) $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

$\boxed{2}$ n を自然数とする. 次の行列 A のべき乗 A^n を計算せよ. ただし, (2) から (4) については, 問題$\boxed{1}$で求めた行列の対角化を利用して計算しても良い.

(1) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$　(2) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$　(3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$　(4) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$

---

[0]解答：

$\boxed{1}$ (1) $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ とおけば, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$　(2) $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ とおけば, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$　(3) $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ とおけば, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$　(4) $P = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ とおけば, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

$\boxed{2}$ (1) $A^n = \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$　(2) $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ -1+2^n & 1 \end{pmatrix}$　(3) $A^n = \begin{pmatrix} 2^{n+1}-3^n & -2^{n+1}+2\cdot 3^n \\ 2^n-3^n & -2^n+2\cdot 3^n \end{pmatrix}$　(4) $A^n = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2\cdot 5^n+2(-3)^n & 5^n-(-3)^n \\ 4\cdot 5^n-4(-3)^n & 2\cdot 5^n+2(-3)^n \end{pmatrix}$

[0]※この講義に関する情報はホームページを参照. http://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2020/lasc.html