線形代数続論, 第 7 回演習問題

2020/7/2 担当：那須

$\boxed{1}$ 次の 2 次形式を対称行列を用いて表せ.

(1) $q(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_1x_2 - 3x_2^2$.

(2) $q(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_2^2 + 2x_1x_3 + x_3^2$.

$\boxed{2}$ 次の 2 次形式を直交変数変換で対角化せよ.

(1) $q(x_1, x_2) = -x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2$.

(2) $q(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2$.

(3) $q(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 - x_2^2 + 2x_1x_3 - x_3^2$.

---

[2]解答：

$\boxed{1}$ (1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ とおくと, $q(x_1, x_2) = A[\mathbf{x}]$. (2) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (6/25 訂正) とおくと, $q(x_1, x_2, x_3) = A[\mathbf{x}]$.

$\boxed{2}$ (1) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ とおくと $q(x_1, x_2) = A[\mathbf{x}]$ と表せる. $P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ とおくと, P は直交行列であり, A は ${}^tPAP = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ と対角化される. 直交変数変換 $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ を考えると $q(x_1, x_2) = -2y_2^2$ と対角化される.

(2) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ とおくと $q(x_1, x_2) = A[\mathbf{x}]$ と表せる. $P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ とおくと, P は直交行列であり, A は ${}^tPAP = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ と対角化される. 直交変数変換 $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ を考えると $q(x_1, x_2) = y_1^2 + 3y_2^2$ と対角化される.

(3) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ とおくと $q(x_1, x_2, x_3) = A[\mathbf{x}]$ と表せる. $P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とおくと, P は直交行列であり, A は ${}^tPAP = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ と対角化される. 直交変数変換 $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ を考えると $q(x_1, x_2) = -2y_1^2 - y_2^2$ と対角化される.

[2]※この講義に関する情報はホームページを参照. http://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2020/lac.html