線形代数続論, 第 3 回演習問題

2020/5/28 担当：那須

$\boxed{1}$ 次のベクトルの定める $\mathbb{R}^3$ の基底 $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$ をシュミットの方法を用いて正規直交化せよ.

(1) $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},$

(2) $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$

(3) $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix},$

$\boxed{2}$ ベクトル空間 $\mathbb{R}[x]_2$ に $\langle f(x), g(x) \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$ により内積 $\langle f(x), g(x) \rangle$ を定義する. 以下の多項式の定める $\mathbb{R}[x]_2$ の基底 $\{f_1, f_2, f_3\}$ をこの内積に関して, シュミットの方法を用いて正規直交化せよ.

(1) $f_1 = 1,\ f_2 = x,\ f_3 = x^2$

(2) $f_1 = x,\ f_2 = x^2,\ f_3 = 1$

---

[0]解答：

$\boxed{1}$ (1) $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$ (2) $\left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ (3) $\left\{ \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{70}} \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$

$\boxed{2}$ (1) $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}x, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}(3x^2 - 1) \right\}$ (2) $\left\{ \sqrt{\frac{3}{2}}x, \sqrt{\frac{5}{2}}x^2, \frac{1}{2\sqrt{2}}(-5x^2 + 3) \right\}$

[0]※この講義に関する情報はホームページを参照. http://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2020/lac.html