

以下では  $\mathbb{R}^n$  の内積は標準内積とし,  $\mathbb{R}[x]_n$  の内積は  $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$  により定義する.

1 次のベクトル空間  $V$  と次のベクトルの組  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  に対し, 内積  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$  を計算せよ.

$$(1) V = \mathbb{R}^3, \left( \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \right) \quad (2) V = \mathbb{R}^4, \left( \begin{bmatrix} 5 \\ -6 \\ 7 \\ -8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 11 \\ 12 \\ 13 \\ 14 \end{bmatrix} \right)$$

$$(3) V = \mathbb{R}[x]_2, (1+x+2x^2, 1-2x+3x^2) \quad (4) V = \mathbb{R}[x]_3, (1-x, 1+x+x^2+x^3)$$

2 次のベクトルのノルムを求めよ.

$$(1) \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} \quad (2) \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix} \quad (3) f(x) = 1 - x + x^2 - x^3$$

3 次のベクトルの組が直交するような定数  $a$  の値を求めよ.

$$(1) \left( \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a \\ a+1 \\ 3 \end{bmatrix} \right) \quad (2) \left( \begin{bmatrix} a \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a \\ a \\ 2 \end{bmatrix} \right) \quad (3) (1-x, 1+ax+x^2)$$

4  $V = \mathbb{R}^3$  または  $V = \mathbb{R}[x]_2$  とする. 次のベクトルの組に直交するようなノルム 1 の  $V$  の元を求めよ.

$$(1) \left( \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \quad (2) \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right) \quad (3) (1-x+x^2, 1-2x+4x^2) \quad (1-x, 1-x^2)$$

(5/21 修正)

5 次を示せ. ただしベクトル  $\mathbf{x}$  に対し  $\|\mathbf{x}\|$  は  $\mathbf{x}$  のノルムを表す.

$$(1) \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = 2(\|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2)$$

$$(2) \mathbf{x} \text{ と } \mathbf{y} \text{ が直交する } (\mathbf{x} \perp \mathbf{y}) \iff \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2$$

$$(3) \mathbf{x} + \mathbf{y} \text{ と } \mathbf{x} - \mathbf{y} \text{ が直交する } (\mathbf{x} + \mathbf{y} \perp \mathbf{x} - \mathbf{y}) \iff \|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{y}\|$$

0解答:

$$1 (1) -19 \quad (2) -38 \quad (3) \frac{32}{5} \quad (4) \frac{8}{5}$$

$$2 (1) \sqrt{83} \quad (2) \sqrt{106} \quad (3) 8\sqrt{\frac{3}{35}} \quad (6/2 \text{ 修正})$$

$$3 (1) a = 1 \quad (2) a = 1, 2 \quad (3) a = 4$$

$$4 (1) \pm \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, -1) \quad (2) \pm \frac{1}{\sqrt{6}}(2, -1, 1) \quad (3) \pm \frac{1}{2\sqrt{2}}(1 - 2x - 5x^2)$$

5 略